**§ 8. Однопараметричні і багатопараметричні методи**

**інтеративного агрегування**

Задамо, взагалі кажучи, довільним способом число λ і елемент ϵ . Вважаємо, що оператор задовільняє умову (6.1). Інтераційний алгоритм (6.6), (6.7) побудований таким чином, що задаємо допоміжні оператори , , яким належить істотна роль в структурі інтераційних формул. Ступінь довільності їхнього вибору підпорядкований насамперед умові (6.5). Формальне обгрунтування цього алгоритму і його практична числова реалізується грунтуючись на використанні множини , означеної за допомогою рівності (6.4). Множина разом з умовою (6.5) забезпечує належність до інтераційних наближень { , } за умови, що до цієї множини належить початкове наближення { , }. До цієї множини належить також і розв'язок { , } системи (1.18), (6.4). Завдяки цьому отримується рівність (6.12), яка є аналогом рівності (5.20), у якій , є точними власним числом і відповідним до нього власним елементом оператора . З-поміж можливостей конкретизації алгоритму (6.6), (6,7) виокремимо випадок, коли та означені за формулами:

=A, =(n=0.1,...) (8.1)

В такому разі алгоритм (6.6), (6.7) ідентичний з алгоритмом інтеративного агрегування (2.12). Інтераційні формули (6.6), (6.7) за умови, що , означені за формулами (8.1), можна подати у вигляді

= + A ( - ) + b, (8.2)

= λ + ( φ, + ( - ), (8.3)

а також у вигляді (2.12) і (2.13). Зазначений вибір операторів , дозволяє скористатися з наведених тверджень у §6 при обгрунтуванні збіжності і алгоритму (6.12). Переконаємося, що умова (6.5) справджується, якщо справджуються рівності (8.1).

(8.1). Якщо , задовільняють співвідношення (8.1), то справджується умова (6.5).

*Доведення:* Потрібна рівність випливає з (6.1) та (8.1). Саме:

( + = + = = = λ.

Маючи на увазі, що , означені за допомогою формул (8.1), тобто

= a(), α(), де (x) = Ax, ,

для оператора Z = H(z, що фігурує в умовах теореми 6.2, можна , зокрема, записати

(x)z = Az - (. (8.4)

Cправді з (8.2), (8.3) та (6.2), (6.3) випливає

-y = (8.5)

Cпівставимо це з рівністю

-x = A( (-y) - -y),

яку можна знайти з (8.2) та (2.1) способом, подібним до того способу, що застосовувався для отримання (6.13). В результаті, враховуючи (6.5), знайдемо

-x = A( - (-x)) - (

(-y) (8.6)

Тут та означені так само як і в §6. Як частковий випадок рівності (8.6) матимемо також

-x = A( - (-x)). (8.7)

Використовуючи позначення (8.4), отримуємо звідси такий результат.

*Теорема 8.1.* Якщо { , } ϵ і при всіх { x, y} ϵ справджується умова

||(x)|| ≤ < 1,

то послідовність { }, отримана за доромогою алгоритму (8.2), (8.3), збігається до розв'язку x= рівняння (2.1) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником .

Позначимо

(x)z = Az - (

(x)ω = - ω,

(x)z = - (φ,z),

*-* 2 *–*

(x)ω = - ω,

(x) = { } i,j=1,2 , =().

За допомогою рівності (8.6) та рівності (8.3) і рівняння (6.3) можна отримати такий результат.

*Теорема 8.2.* Нехай { , } ϵ і при всіх { x, y } ϵ справджується умова

|| (x)|| ≤ q < 1,

де норму в Е x ( Е - простір, - множина дійсних чисел) означено, наприклад, як , де ||x|| - норма в Е-елемента x ϵ Е, |y| - абсолютна величина числа y. Тоді послідовність { }, отримана за допомогою алгоритму (8.2), (8.3), збігається до розв'язку ріняння (1.18) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.

*Доведення.* Очевидним способом отримуються рівності

= () + (- ), (8.9)

= () + (- ), (8.10)

з яких випливає твердження теореми.

*Приклад 8.1.* До системи

= 2+3 130,

= 1.92+ 2 202

в прикладі 6.1 застосований алгоритм (6.6), (6.7). З такими , , які задовольняють умову 6.5, але відрізняються від означених за формулами (8.1). Застосуємо однопараметричний метод інтеративного агрегування у вигляді (8.2), (8.3). Будемо вважати, що замість =4.4 маємо λ= 4.5, а замість = {4;5} маємо φ = {4.2; 5.1} . Ці значення для φ і λ використані також в прикладі 6.1. За початкове наближення виберемо те саме = {10; 100 в прикладі 6.1. Вибираємо з умови {} ϵ , тобто,

= - (φ, = - (4.5 · 10 + 5.1 · 100).

Отже, за такого вибору маємо = - 93.08572. Очевидно, що = { = { 0.5797101; 0.3971014, (φ, = 4,5 + 5.1 = = 0.4599995; = λ - (φ, = 4.5 - 4.4599995 = 0.400005, = λ I - = (), φ, = 22.08, оскільки φ = { 0.708; 0.15 }. Для знаходження матимемо = 4.5 + ( φ, + ( -93. 08572 - ). Отже, = 5.3053548. Продовживши обчислення, знайдемо, зокрема, що = { 134. 08643; -21.12375 , = { 99. 52555; 10. 43289 . Ці ж числові результати отримуються при використанні алгоритму (2.13) з тим самим

- 3 -

= {10; 100, яке використане у прикладі 6.1.

*Приклад 8.2* Застосуємо однопараметричний метод інтеративного агрегування до системи рівнянь з прикладу 5.8. Використовуючи формулу (2.12 будемо мати

= (2.1+ 2.2+ 0.3+ 0.5 ) - 257,

= (0.9+ 0.82.1+ 0.22.1) +7,

= (0.1+ 0.2+ 2.5+ 2.8) - 163,

= (0.4+ 0.3+ 0.5+ 0.2) - 12,

де λ = = ρ(A) = 3.5, φ = = { 1; 1; 1;1}, (φ, ) = + + + = =170, (φ, b) = + + + = - 425. Формально цей процес тотожний з інтераційним процесом (1.19), оскільки і є точними власним числам і власним векторам відповідно спряженої з матрицею коефіцієнтів системи. Фактична заміна методу (1.19) методом, який описують щойно наведені формули, не призводить до збіжності інтерацій . Реалізуючи цей інтераційний алгоритм з тим самим початковим наближенням = { 50; 50; 50;10 , яке використано в прикладі 5.8, можна зробити висновок про його розбіжність. Це можна спостерегти з наведених двох інтерацій: = { - 17; 102; 33; 52 , = {- 32.4; 79.9; 83.8; 38.7 і з наступних інтерацій.

*Зауваження 8.1*. Позначимо z = G ()z, G(x)z = (φ, (I - A) z).

Рівність (8.7) при цьому отримує вигляд:

- = (A - ) ( - )

і співвідношення (8.8) можна розглянути як умову узагальненого стану оператора A на множині E x .

Вважатимемо, що рівняння(1.18) записане у вигляді (5.26) і розглядатимемо його за тих самих припущень щодо оператора А і вільного члена b, які зафіксовані в §7. Дослідження агрегаційно-інтеративного алгоритму (7.6), (7.7) грунтується в §7, зокрема, на двох основних припущеннях. Одне з них підпорядковує = {} та = {}, = (), = (), вимозі, щоб справджувалися рівності (7.21). Інше - стосується до початкового наближення { , }, вибраного таким чином, що { , } ϵ , де означено за допомогою рівності (7.4). Припустимо, що справджуються рівності

- 4 -

(7.17) і що, взагалі кажучи, оператор = {} є нульовим.

Розглянемо інтераційний алгоритм

= + (s = ) (8.11)

Конкретизуємо вибір оператора = {} за допомогою формул

=

і записуємо формули (8.11) у вигляді

= ( + , (8.13)

а також у вигляді

= (Ф, + b. (8.14).

- 5 -

*Тема 8.2.*

Нехай справджується умова

det (I - [Ф, ) ≠0,

де = , означені рівностями (8.12). Тоді формули (8.11) можна переписати у вигляді

= (I - [Ф, (Ф, b + b. (8.16)

*Доведення.* Оскільки з формул (8.11) випливає, що

= (, ( + =

( + (

тобто,

(Ф, = [Ф, (Ф, + (Ф, b. (8.17)

Звідси і з (8.11) випливає рівність (8.16).

При R=1 інтераційний процес ідентичний з процесом (2.12).

*Тема 8.3.*

Нехай означені за допомогою формул (8.12). Якщо матрицю = {} з числовими елементами означено за формулами

= = , (8.18)

то при кожному n=0.1,... справджуються рівності (7.5), тобто, рівності

[Ф, + = Λ. (8.19)

*Доведення.* Використаємо співвідношення (8.11), (8.12), (8.18) та (7.1). Отримаємо:

+ = =

**=**

Цим тему доведено.

- 6 -

Таким чином, багатопараметричнний метод інтеративного агрегування, побудований за допомогою формул (8.11), можна розглядати як окремий випадок багатопарамеричного агрегаційно-інтеративного алгоритму (7.6), (7.7). Винятковість алгоритму (8.11) за цієї ситуації проявляється в тому, що вибір та за формулами (8.12) та (8.18) забезпечує достовірність співвідношень (8.19).

Розглянемо особливий випадок, який виокремлюється припущення, що справджується рівність (5.27) і тому множина означується як сукупність таких X ϵ E, для яких матимемо рівність (5.32).

*Тема 8.4*

Нехай справджуються рівності (5.27) і маємо нерівність

det (I - Λ) ≠ 0

Тоді для деякого ϵ E одна інтерація, зреалізована за допомогою формули (8.11), призводить до співвідношення ϵ , де множина означена за допомогою рівності (5.32).

*Доведення.* За цих обставин оператори в формулах (7.17) можна вважати нульовими, тобто, можна вважати, що маємо рівності:

= .

Тому, використовуючи (8.12), знайдемо

, = = = = .

Отже, [Ф, ] = Λ. Використавши міркування, подібні до тих, які використані для доведення рівності (8.17), можна з рівностей (8.11) отримати рівність

(Ф, = Λ (Ф, + (Ф, b.

Звідси випливає, що

(Ф, = (I - Λ) (Ф, b (8.21)

При n=0 отримаємо рівність, яка означає, що тему доведено.

- 7-

Зазначимо, що використані при обгрунтуванні теми 8.4 міркування

дозволяють зробити також висновок про те, що у випадку, коли підібрані за формулами (8.12), (8.18), інтерації (8.11) при n ≥ 1 тотожні з отриманими за допомогою звичайного методу послідовних наближень = A+b інтераціями з одним і тим самим початковим наближенням .

Приєднаємо до рівняння (5.26) допоміжну систему рівнянь

= + , (s = ). (8.22)

Використовуючи формули (8.12) , (8.18) , алгоритм (8.11) подамо у вигляді інтераційного процесу, який описується формулами

+ ( , + ( - ) (8.23)

= + . (8.24)

Тому для дослідження збіжності алгоритму (8.11) можна використати результати §7.

- 8 -