**§ 8. Однопараметричні і багатопараметричні методи**

**інтеративного агрегування**

 Задамо, взагалі кажучи, довільним способом число λ і елемент $φ$ ϵ $Е^{\*}$. Вважаємо, що оператор $A\_{1}^{\*}$ задовільняє умову (6.1). Інтераційний алгоритм (6.6), (6.7) побудований таким чином, що задаємо допоміжні оператори $a^{(n)}$, $α^{(n)}$, яким належить істотна роль в структурі інтераційних формул. Ступінь довільності їхнього вибору підпорядкований насамперед умові (6.5). Формальне обгрунтування цього алгоритму і його практична числова реалізується грунтуючись на використанні множини $ε\_{0}$, означеної за допомогою рівності (6.4). Множина $ε\_{0}$ разом з умовою (6.5) забезпечує належність до $ε\_{0}$ інтераційних наближень { $x^{(n)}$, $y^{(n)}$} за умови, що до цієї множини належить початкове наближення { $x^{(0)}$, $y^{(0)}$}. До цієї множини $ε\_{0}$ належить також і розв'язок { $x^{\*}$, $y^{\*}$} системи (1.18), (6.4). Завдяки цьому отримується рівність (6.12), яка є аналогом рівності (5.20), у якій $λ\_{1}$, $φ\_{1}$ є точними власним числом і відповідним до нього власним елементом оператора $A^{\*}$. З-поміж можливостей конкретизації алгоритму (6.6), (6,7) виокремимо випадок, коли $a^{(n)}$ та $α^{(n)}$ означені за формулами:

$a^{(n)}$=$\frac{1}{(φ, x^{(n)})}$A$x^{(n)}$, $ α^{(n)}$=$\frac{(A\_{1}^{\*},φ,x^{\left(n\right)} ) }{(φ,x^{(n)})}$(n=0.1,...) (8.1)

 В такому разі алгоритм (6.6), (6.7) ідентичний з алгоритмом інтеративного агрегування (2.12). Інтераційні формули (6.6), (6.7) за умови, що $a^{(n)}$, $α^{(n)}$ означені за формулами (8.1), можна подати у вигляді

$x^{(n+1)}$= $Ax^{(n)}$+ $\frac{1}{(φ, x^{\left(n\right)})}$ A$x^{(n)}$ ($y^{(n)}$ - $y^{(n+1)}$) + b, (8.2)

$y^{(n+1)}$ = λ $y^{(n+1)}$+ ($A\_{1}^{\*}$ φ, $x^{(n)}$ + $\frac{(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)})}{(φ, x^{\left(n\right)})}$ ($y^{(n)}$ - $y^{(n+1)}$), (8.3)

а також у вигляді (2.12) і (2.13). Зазначений вибір операторів $a^{(n)}$, $α^{(n)}$ дозволяє скористатися з наведених тверджень у §6 при обгрунтуванні збіжності і алгоритму (6.12). Переконаємося, що умова (6.5) справджується, якщо справджуються рівності (8.1).

 (8.1). Якщо $a^{(n)}$ , $α^{(n)}$ задовільняють співвідношення (8.1), то справджується умова (6.5).

 *Доведення:* Потрібна рівність випливає з (6.1) та (8.1). Саме:

($φ,a^{(n)})$ + $α^{(n)}$= $\frac{(φ, Ax^{\left(n\right)})}{(φ, x^{\left(n\right)})}$ + $\frac{(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)})}{(φ, x^{\left(n\right)})}$ = $\frac{(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)})+(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)}) }{(φ, x^{\left(n\right)})}$ = $\frac{λ\left(φ, x^{\left(n\right)}\right)-(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)})+(A\_{1}^{\*} φ, x^{(n)}) }{(φ, x^{\left(n\right)})}$ = λ.

Маючи на увазі, що $a^{(n)}$, $α^{(n)}$ означені за допомогою формул (8.1), тобто

$a^{(n)}$= a($x^{(n)}$), $ α^{(n)}=$ α($x^{(n)}$), де $a$(x) = $\frac{1}{(φ, x)}$Ax, $α\left(x\right)= \frac{(A\_{1}^{\*}, φ, x)}{(φ,x)}$,

для оператора $Н^{(n)}$Z = H($x^{(n)})$z, що фігурує в умовах теореми 6.2, можна , зокрема, записати

$\overbar{H\_{A}}$(x)z = Az - $\frac{Ax}{(φ, \left(I-A\right)x)}$ ($φ, \left(I-A\right)z)$. (8.4)

Cправді з (8.2), (8.3) та (6.2), (6.3) випливає

$y^{(n+1)}$-y = $\frac{\left(φ,Ax^{\left(n\right)}\right)\left(φ,x^{\left(n\right)}- x\right)- (φ,x^{\left(n\right)})(φ,A\left(x^{\left(n\right)}-x\right))}{\left(φ,x^{\left(n\right)}- Ax^{(n)}\right)}$ (8.5)

Cпівставимо це з рівністю

$x^{(n+1)}$-x = A($x^{\left(n\right)}- x)+ \frac{Ax^{(n)}}{(φ,x^{\left(n\right)})}$ ($y^{(n)}$-y) - $\frac{Ax^{(n)}}{(φ,x^{\left(n\right)})}$ $(y^{(n+1)}$-y),

яку можна знайти з (8.2) та (2.1) способом, подібним до того способу, що застосовувався для отримання (6.13). В результаті, враховуючи (6.5), знайдемо

$x^{(n+1)}$-x = A($x^{\left(n\right)}- x)$ - $\frac{Ax^{(n)}}{(φ, \left(I-A\right)x^{(n)})}$ ($φ, \left(I-A\right)(x^{(n)}$-x)) - $Ψ^{(n)}$($φ,x^{\left(n\right)}-x)- $

$Ψ^{(n)}$($y^{(n)}$-y) (8.6)

Тут $Ψ^{(n)}$ та $Ψ\_{0}^{(n)}$ означені так само як і в §6. Як частковий випадок рівності (8.6) матимемо також

$x^{(n+1)}$-x = A($x^{\left(n\right)}- x)$ - $\frac{Ax^{(n)}}{(φ, \left(I-A\right)x^{(n)})}$ ($φ, \left(I-A\right)(x^{(n)}$-x)). (8.7)

Використовуючи позначення (8.4), отримуємо звідси такий результат.

*Теорема 8.1.* Якщо { $x^{(0)}$, $y^{(0)}$} ϵ $ε\_{0}$ і при всіх { x, y} ϵ $ε\_{0}$ справджується умова

||$\overbar{H\_{1}}$(x)|| ≤ $q\_{0}$ < 1,

то послідовність { $x^{(n)}$}, отримана за доромогою алгоритму (8.2), (8.3), збігається до розв'язку x=$x^{\*}$ рівняння (2.1) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником $q\_{0}$.

 Позначимо

$h\_{11}$(x)z = Az - $\frac{Ax}{(φ, \left(I-A\right)x)}$ ($φ, \left(I-A\right)z)- Ψ^{\left(n\right)}\left(φ,z\right),$

$h\_{12}$(x)ω = - $Ψ^{\left(n\right)}$ω,

$h\_{21}$(x)z = $\frac{(φ,Ax)\left(φ,z\right)- (φ,x)(φ,Az)}{(φ, \left(I-A\right)x)}$ - $Ψ\_{0}^{(n)}$(φ,z),

*-* 2 *–*

$h\_{22}$(x)ω = - $Ψ\_{0}^{(n)}$ω,

$H\_{1}$(x) = { $h\_{ij}(x)$ } i,j=1,2 , $H\_{1}^{(n)}$=$H\_{1}$($x^{(n)}$).

За допомогою рівності (8.6) та рівності (8.3) і рівняння (6.3) можна отримати такий результат.

*Теорема 8.2.* Нехай { $x^{(0)}$, $y^{(0)}$} ϵ $ε\_{0}$ і при всіх { x, y } ϵ $ε\_{0} $справджується умова

||$H\_{1}$ (x)|| ≤ q < 1,

де норму в Е x $E\_{1}$ ( Е - простір, $E\_{1}$ - множина дійсних чисел) означено, наприклад, як $\sqrt{|\left|x\right||^{2}+|y|^{2}}$ , де ||x|| - норма в Е-елемента x ϵ Е, |y| - абсолютна величина числа y. Тоді послідовність { $x^{(n)}$}, отримана за допомогою алгоритму (8.2), (8.3), збігається до розв'язку $x^{\*}$ ріняння (1.18) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.

*Доведення.* Очевидним способом отримуються рівності

$x^{(n+1)}-x^{\*}$ = $h\_{11}^{(n)}$ ($x^{(n)}-x^{\*}$) + $h\_{12}^{(n)}$ ($y^{(n)}$- $y^{\*}$), (8.9)

$y^{(n+1)}-y^{\*}$= $h\_{21}^{(n)}$($x^{(n)}-x^{\*}$) + $h\_{22}$ ($y^{(n)}$- $y^{\*}$), (8.10)

з яких випливає твердження теореми.

*Приклад 8.1.* До системи

$x\_{1}$= 2$x\_{1}$+3$x\_{2}-$ 130,

$ x\_{2}$= 1.92$x\_{1}$+ 2$x\_{2}-$ 202

в прикладі 6.1 застосований алгоритм (6.6), (6.7). З такими $a^{(n)}$, $α^{(n)}$, які задовольняють умову 6.5, але відрізняються від означених за формулами (8.1). Застосуємо однопараметричний метод інтеративного агрегування у вигляді (8.2), (8.3). Будемо вважати, що замість $λ\_{1}$=4.4 маємо λ= 4.5, а замість $φ\_{1}$= {4;5} маємо φ = {4.2; 5.1} . Ці значення для φ і λ використані також в прикладі 6.1. За початкове наближення виберемо те саме $x^{(0)}$= {10; 100$\}^{т}$ в прикладі 6.1. Вибираємо $y\_{0}$ з умови {$x^{(0)}, у^{(0)}$} ϵ $ε\_{0}$, тобто,

$ у^{(0)}$= $\frac{(φ,b)}{1-λ}$ - (φ, $x^{(0)})$ = $\frac{4.5 \left(-130\right)+5.1 (-202)}{1-4.5}$ - (4.5 · 10 + 5.1 · 100).

Отже, за такого вибору $x^{(0)}$ маємо $ у^{(0)}$ = - 93.08572. Очевидно, що $a^{(0)}$= { $a\_{1}^{(0)}; a\_{2}^{(0)}\}^{T}$ = { 0.5797101; 0.3971014$\}^{T}$, (φ, $a^{(0)}) $ = 4,5 $a\_{1}^{(0)}$ + 5.1 $a\_{2}^{(0)}$ = = 0.4599995; $α^{(0)}$ = λ - (φ, $a^{(0)})$ = 4.5 - 4.4599995 = 0.400005, $A\_{1}^{\*}$ = λ I - $A^{\*}$ = ($\begin{matrix}2,5&-1,92\\-3&2,5\end{matrix}$), $(A\_{1}^{\*}$ φ, $x^{(0)})$ = 22.08, оскільки $A\_{1}^{\*}$ φ = { 0.708; 0.15 }. Для знаходження $у^{(1)}$ матимемо $у^{(1)}$= 4.5 $у^{(1)}$ + ($A\_{1}^{\*}$ φ, $x^{(0)})$ + $α^{(0)}$ ( -93. 08572 - $у^{(1)}$). Отже, $у^{(1)}$ = 5.3053548. Продовживши обчислення, знайдемо, зокрема, що $x^{(1)}$ = { 134. 08643; -21.12375 $\}^{T}$, $x^{(2)}$ = { 99. 52555; 10. 43289 $\}^{T}$. Ці ж числові результати отримуються при використанні алгоритму (2.13) з тим самим

- 3 -

$x^{(0)}$= {10; 100$\}^{т}$, яке використане у прикладі 6.1.

*Приклад 8.2* Застосуємо однопараметричний метод інтеративного агрегування до системи рівнянь з прикладу 5.8. Використовуючи формулу (2.12 будемо мати

$x\_{1}^{(n+1)}$ = $\frac{( φ, x^{\left(n+1\right)})}{(φ, x^{(n)})}$ (2.1$x\_{1}^{(n)}$+ 2.2$x\_{2}^{(n)}$+ 0.3$x\_{3}^{(n)}$+ 0.5 $x\_{4}^{(n)}$) - 257,

$x\_{2}^{(n+1)}$= $\frac{( φ, x^{\left(n+1\right)})}{(φ, x^{(n)})}$ (0.9$x\_{1}^{(n)}$+ 0.82.1$x\_{2}^{(n)}$+ 0.22.1$x\_{3}^{(n)}$) +7,

$x\_{3}^{(n+1)}$= $\frac{( φ, x^{\left(n+1\right)})}{(φ, x^{(n)})}$ (0.1$x\_{1}^{(n)}$+ 0.2$x\_{2}^{(n)}$+ 2.5$x\_{3}^{(n)}$+ 2.8$x\_{4}^{(n)}$) - 163,

$x\_{4}^{(n+1)}$= $\frac{( φ, x^{\left(n+1\right)})}{(φ, x^{(n)})}$ (0.4$x\_{1}^{(n)}$+ 0.3$x\_{2}^{(n)}$+ 0.5$x\_{3}^{(n)}$+ 0.2$x\_{4}^{(n)}$) - 12,

де λ = $λ\_{1}$ = ρ(A) = 3.5, φ = $φ\_{1}$ = { 1; 1; 1;1}, (φ, $x^{(n)}$) = $x\_{1}^{(n)}$+ $x\_{2}^{(n)}$+ $x\_{3}^{(n)}$+ $x\_{4}^{(n)}$ = =170, (φ, b) = $b\_{1}$+ $b\_{2}$+ $b\_{3}$+ $b\_{4}$ = - 425. Формально цей процес тотожний з інтераційним процесом (1.19), оскільки $λ\_{1}$ і $φ\_{1}$ є точними власним числам і власним векторам відповідно спряженої з матрицею коефіцієнтів системи. Фактична заміна методу (1.19) методом, який описують щойно наведені формули, не призводить до збіжності інтерацій $x^{(n)}$. Реалізуючи цей інтераційний алгоритм з тим самим початковим наближенням $x^{(0)}$ = { 50; 50; 50;10 $\}^{T}$, яке використано в прикладі 5.8, можна зробити висновок про його розбіжність. Це можна спостерегти з наведених двох інтерацій: $x^{(1)}$ = { - 17; 102; 33; 52 $\}^{T}$, $x^{(2)}$ = {- 32.4; 79.9; 83.8; 38.7 $\}^{T}$ і з наступних інтерацій.

*Зауваження 8.1*. Позначимо $G^{(n)}$z = G ($x^{(n)}$)z, G(x)z = $\frac{Ax}{(φ, \left(I-A\right)x)}$ (φ, (I - A) z).

Рівність (8.7) при цьому отримує вигляд:

$x^{(n+1)}$- $x^{\*}$= (A - $G^{(n)}$) ($x^{(n)}$ - $x^{\*}$)

і співвідношення (8.8) можна розглянути як умову узагальненого стану оператора A на множині E x $E^{'}$.

 Вважатимемо, що рівняння(1.18) записане у вигляді (5.26) і розглядатимемо його за тих самих припущень щодо оператора А і вільного члена b, які зафіксовані в §7. Дослідження агрегаційно-інтеративного алгоритму (7.6), (7.7) грунтується в §7, зокрема, на двох основних припущеннях. Одне з них підпорядковує $a^{(n)}$= {$a\_{sr}^{(n)}$} та $ α^{(n)}$= {$α\_{sr}^{(n)}$}, $ a\_{sr}^{(n)}$= $a\_{sr}$($x^{(n)}$), $α\_{sr}^{(n)}$= $α\_{sr}$($x^{(n)}$), вимозі, щоб справджувалися рівності (7.21). Інше - стосується до початкового наближення { $x^{(0)}$, $y^{(0)}$}, вибраного таким чином, що { $x^{(0)}$, $y^{(0)}$} ϵ $ε\_{0}$, де $ε\_{0}$ означено за допомогою рівності (7.4). Припустимо, що справджуються рівності

- 4 -

(7.17) і що, взагалі кажучи, оператор $\tilde{A^{\*}}$ = {$\tilde{A\_{rs}^{\*}}$} є нульовим.

Розглянемо інтераційний алгоритм

$X\_{s}^{(n+1)}$= $\sum\_{r=1}^{R}\frac{(Ф\_{r, }X\_{r}^{(n+1)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{(n)})\_{r}}$ $A\_{sr}$ $X\_{r}^{(n)}$+ $b\_{s}$ (s = $\overbar{1, R}$) (8.11)

Конкретизуємо вибір оператора $a^{(n)}$= {$a\_{ir}^{(n)}$} за допомогою формул

$a\_{sr}^{(n)}$= $\frac{A\_{sr} X\_{r}^{(n)}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{(n)})\_{r}}$

і записуємо формули (8.11) у вигляді

$X\_{s}^{(n+1)}$= $\sum\_{r=1}^{R} a\_{sr}^{(n)}$ ($Ф\_{r, }X\_{r}^{(n+1)})\_{r}$ + $b\_{s}$ , (8.13)

а також у вигляді

$X^{(n+1)}$= $a^{(n)}$ (Ф, $X^{(n+1)})^{R}$ + b. (8.14).

- 5 -

*Тема 8.2.*

 Нехай справджується умова

det (I - [Ф, $a^{(n)}]^{R}$) ≠0,

де $a^{(n)}$= $\{ a\_{sr}^{(n)}\}$, $ a\_{sr}^{(n)}$ означені рівностями (8.12). Тоді формули (8.11) можна переписати у вигляді

$X^{(n+1)}$ = $a^{(n)}$ (I - [Ф, $a^{(n)}]^{R})^{-1}$ (Ф, b$)^{R}$ + b. (8.16)

*Доведення.* Оскільки з формул (8.11) випливає, що

$(Ф\_{s }, X\_{s}^{(n+1)})\_{s}$= ($Ф\_{s }$, $\sum\_{r=1}^{R} \frac{A\_{sr} X\_{r}^{(n)}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})}$ ($Ф\_{r, }X\_{r}^{(n+1)})\_{r}$ + $b\_{s})\_{s}$ =

$\sum\_{r=1}^{R} \frac{(Ф\_{s , }A\_{sr} X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ ($Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n+1\right)})\_{r}$ + ($Ф\_{s }, b\_{s})$

тобто,

(Ф, $X^{(n+1)})^{R}$= [Ф, $a^{(n)}]^{R}$ (Ф, $X^{(n+1)})^{R}$ + (Ф, b$)^{R}$. (8.17)

Звідси і з (8.11) випливає рівність (8.16).

При R=1 інтераційний процес ідентичний з процесом (2.12).

*Тема 8.3.*

 Нехай $ a\_{sr}^{(n)}$ означені за допомогою формул (8.12). Якщо матрицю $ α^{(n)}$= {$α\_{sr}^{(n)}$} з числовими елементами $α\_{sr}^{(n)}$ означено за формулами

$α\_{sr}^{(n)}$= $\frac{\tilde{A\_{rs}^{\*}} Ф\_{S,} X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ = $\frac{Ф\_{S,} \tilde{A\_{sr} }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ , (8.18)

то при кожному n=0.1,... справджуються рівності (7.5), тобто, рівності

[Ф, $a^{(n)}]^{R}$ + $α^{(n)}$= Λ. (8.19)

*Доведення.* Використаємо співвідношення (8.11), (8.12), (8.18) та (7.1). Отримаємо:

$(Ф\_{S,}$ $ a\_{sr}^{(n)})\_{S}$ + $α\_{sr}^{(n)}$ = $\frac{(Ф\_{S,}A\_{sr} X\_{r}^{\left(n\right)})\_{s}+ Ф\_{S,} \tilde{A\_{sr} }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r} }{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ =

$\frac{A\_{rs}^{\*} Ф\_{s, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}+ \tilde{A\_{rs}^{\*}} Ф\_{S,} X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ **=** $λ\_{sr}$

Цим тему доведено.

- 6 -

 Таким чином, багатопараметричнний метод інтеративного агрегування, побудований за допомогою формул (8.11), можна розглядати як окремий випадок багатопарамеричного агрегаційно-інтеративного алгоритму (7.6), (7.7). Винятковість алгоритму (8.11) за цієї ситуації проявляється в тому, що вибір $a^{(n)}$ та $α^{(n)}$ за формулами (8.12) та (8.18) забезпечує достовірність співвідношень (8.19).

 Розглянемо особливий випадок, який виокремлюється припущення, що справджується рівність (5.27) і тому множина$ ε\_{0}$ означується як сукупність таких X ϵ E, для яких матимемо рівність (5.32).

*Тема 8.4*

 Нехай справджуються рівності (5.27) і маємо нерівність

det (I - Λ) ≠ 0

Тоді для деякого $x^{(0)}$ ϵ E одна інтерація, зреалізована за допомогою формули (8.11), призводить до співвідношення $x^{(1)}$ ϵ $ε\_{0}$ , де множина $ ε\_{0}$ означена за допомогою рівності (5.32).

 *Доведення.* За цих обставин оператори $\tilde{A\_{rs}^{\*}}$ в формулах (7.17) можна вважати нульовими, тобто, можна вважати, що маємо рівності:

$\tilde{A\_{rs}^{\*}}$ $Ф\_{s}$ = $λ\_{sr}Ф\_{r}$ .

 Тому, використовуючи (8.12), знайдемо

$(Ф\_{s}$ , $α\_{sr}^{(n)})\_{s}$ = $ \frac{(Ф\_{s , }A\_{sr} X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})}$ = $\frac{A\_{rs}^{\*} Ф\_{s, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{(Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})}$ = $\frac{λ\_{sr} (Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}{ (Ф\_{r, }X\_{r}^{\left(n\right)})\_{r}}$ = $λ\_{sr}$ .

 Отже, [Ф, $a^{(n)}$] = Λ. Використавши міркування, подібні до тих, які використані для доведення рівності (8.17), можна з рівностей (8.11) отримати рівність

(Ф, $X^{(n+1)})^{R}$ = Λ (Ф, $X^{(n+1)})^{R}$ + (Ф, b$)^{R}$.

 Звідси випливає, що

(Ф, $X^{(n+1)})^{R}$ = (I - Λ) (Ф, b$)^{R}$ (8.21)

 При n=0 отримаємо рівність, яка означає, що тему доведено.

- 7-

 Зазначимо, що використані при обгрунтуванні теми 8.4 міркування

дозволяють зробити також висновок про те, що у випадку, коли $a^{(n)}$ $, α^{(n)}$ підібрані за формулами (8.12), (8.18), інтерації (8.11) при n ≥ 1 тотожні з отриманими за допомогою звичайного методу послідовних наближень $x^{(n+1)}$= A$x^{(n)}$+b інтераціями з одним і тим самим початковим наближенням $x\_{0} ϵ ε\_{0}$.

 Приєднаємо до рівняння (5.26) допоміжну систему рівнянь

$y\_{s}$ = $\sum\_{r=1}^{R}λ\_{sr} y\_{r}$ + $\sum\_{r=1}^{R} (\tilde{A\_{rs}^{\*}}$ $Ф\_{s}$ , $x\_{r}^{(n)})\_{r}$ (s = $\overbar{1, R}$). (8.22)

Використовуючи формули (8.12) , (8.18) , алгоритм (8.11) подамо у вигляді інтераційного процесу, який описується формулами

$y\_{s}^{(n+1)}$ $\sum\_{r=1}^{R}λ\_{sr} y\_{r}^{(n+1)}$+ ($\tilde{A\_{rs}^{\*}}$ $Ф\_{s}$ , $x\_{r}^{(n)})\_{r}$+ $\sum\_{r=1}^{R}α\_{sr}^{(n)}$ ($y\_{r}^{(n)}$ - $y\_{r}^{(n+1)}$) (8.23)

$x\_{s}^{(n+1)}$= $\sum\_{r=1}^{R} A\_{sr} x\_{r}^{(n)}+ $ $\sum\_{r=1}^{R}(y\_{r}^{(n)} - y\_{r}^{(n+1)})$ + $b\_{s}$ . (8.24)

 Тому для дослідження збіжності алгоритму (8.11) можна використати результати §7.

- 8 -