1.Функції багатьох змінних. Графік функції двох змінних.

Величина z називається ф-цією двох змінних величин x,y, якщо кожній парі чисел, які можуть бути значеннями змінних x,y, відповідає одне або декілька визначених значень величини z. При цьому змінні x,y, назив аргументами.

Поняття ф-ції трьох і більше аргументів і її область визначення вводиться аналогічно ф-ції двох аргументів.

Ф-цією двох і більше аргументів можна задати таблично у вигляді просторової моделі .

Область визначення двох змінних плюс пари тих чисел, які можуть бути значеннями аргументів x,y, функції f(x,y,).

Графіком функції двох змінних z=f(x,y,) є деяка повехня S в прямокутній системі координат OXYZ; Проекція точки М поверхні S на площину XOYє зображеннями аргументів x,y, апліката z точки М відображає відповідне значення функції.

Які з величин є функціями n змінних? Вказати n.

А) Довжина кола *l=2ПR* – функція однієї змінної n=1.

Б) Об’єм конуса V – двох змінних n=2.

В) Потенціальна енергія тіла. u=u(u1,u2,u3) – багатьох змінних.

2. Границя функції двох змінних. Неперервність в точці і в області.

Поняття границі функції двох аргументів встановлюється так, як і для функції одного аргументу. Число *l* називається границею функції z=f(x,y,) в точці М0(а,в) якщо z прямує до *l* коли точка М(х,у) прямує до М0.

=*l* або =*l*

Вважається, якщо ф-ція визначена у всіх точках в околі точки М0.

Визначення: число *l* називається границею функції f(x,y,) в точці М0(а,в), якщо значення різниці f(x,y,)- *l* залишається меншим ніж попередньо встановлене додатнє число *Е* у випадку коли відстань М0М= від точки М0(а,в) до точки М(х,у) менше за деяке додатне число *Е* .

Геометричний зміст.

Апліката поверхні z=f(x,y,) відрізняються від *l* менше ніж на *Е* як тільки проекція точки, яка лежить на поверхні, потрапляє в середину кола радіуса з центром в точці М0(а,в)

А) Намалювати окіл точки М(3,2) при *Е*=1/2.

 у

 2 .

 3 х

Б) Знайти границю ф-ції в точці за теоремою про арифметичні дії з границями:

 = = =

Відповідь:

3. Часткові прирости. Частинні похідні, градієнт.

Нехай функція f кількох змінних визначена в точках (х0,у0,….z0) є Rn та (х,у,…z) є Rn. Тоді різниця -х0, = у-у0, =z-z0 – називають відповідно приростами відповідних змінних х,у,…z.

Якщо = 0…….. = 0, то різницю:

f(х0,у0,….z0)=f(x+x0, у0,….z0)- f(х0,у0,….z0) – називають частинним приростом ф-ції f по змінній ху трчці (х0,у0,z0).

Аналогічно визначаються частинні прирости функції f в точці (х,у,z) по змінній у,….,z.

f(х0,у0,….z0),….,f(х0,у0,….z0)

Частинною похідною по змінній х ф-ції в точці (х0,у0,….z0) називають число

f’(х0,у0,….z0)= = .

Якщо частинні похідні позначають у будь-якій точці з області визначення ф-ції, то їх позначають так:

f’х, f’у,…., f’z або ,,…,.

Градієнт – вектор визначений у кожній точці скалярного поля формулою.

*gradf*= + +

У кожній точці скалярного поля вектор gradf напрямлений до нормалі до поверхні рівня , що проходить через дану точку М.

Знайти частковий приріст і похідну по змінній х за означенням, якщо z=x2+2xy

f(х,у)=Z=((x+)y=х2+2х+2+2ху+2у=х2+2(х+у)+2+2ху

f’х = Z’x+ = =++2xy+= 2(x+y).

**4**)Повний приріст . Озн . диф. функції в точці та диференціалу ф-ції 2 –х змінних. Формула для диференціалу через частині похідні та інваріантність форми диференціалу.

Повним приростом ф-ії f у точці (x0,y0,z0) називається рівняння ∆ f(x0,y0,z0) =f(x,y,z) -f(x0,y0,z0) = f(x0+ ∆x, y0 +∆y, z0 +∆z) = f(x0,y0,z0)

Функція z= f (x,y) називається диференційованою в точці (x0,y0 ) якщо повний приріст функції z можна записати у вигляді

∆ z=A(x0,y0 ) ∆x +B(x0,y0 ) ∆y+O(g)

g=√∆x2+∆y2 де O(g)—величина яка нескінченно малого вищого порядку порівняно з g

Повним диференціалом dz функції в т. (x0,y0 ) називається величина

Dz=df (x0,y0 )=df/dx(x0,y0 ) dx+ df/dy (x0,y0 ) ∆y

Dz=f ‘x (x0,y0 ) dx+ f ‘y(x0,y0 ) dy де dx і dy –диференціали незалежних з.

Універсальність форми диференціалу

D2z/dxdy=d2z/dydx

Знайти повний приріст ( повний диференціал функції за озн. Z=(x-1)2+2y2

∆ z=(x+∆ x-1)2+2(y+y2)2-(x-1)2-2y2=(x-1)2 +2∆ x (x-1)+ ∆ x2+2y2+4y∆ y+2∆ y2-(x-1)2-2y2=

=2∆ x(x-1)+ ∆ x2+4y∆ y+2∆ y2

Zx’=2(x-1)=

Zy’==4y

Dz= 2x(x-1)dx+4ydy

**5)**Частинні похідні складної функції багатьох змінних та похідні неявно заданих функцій , якщо

*z=z(x,y) x=x(t) y=y(t )*  тоді *dz/dt=dz/dx\*dy/dt+dzdy\*dydt*

Якщо *z=z (x,y) y=y(x)* тоді *dz/dx= dz/dx+dz/dy\*dy/dx*

Якщо z=z(x,y), x=x(u,v) y=y(u,v) тоді частинні похідні за незалежними змінними u і v у довільній точці (u,v) знаходяться так

*Dz/du=(dz/dx)(dx/du)+(dz/dy)(dy/du)*

*Dz/dv=(dz/dx)(dx/dv)+(dz/dy)(dy/dv)*

Похідна неявних функцій.

**Теорема.** Якщо функція f(x,y)=0, задовільняє умови

---існує т. М0(x0,y0)=0

---в колі т. М0  ф-ія F (x,y)=0 та частинні похідні FX і FY неперервні

--- F’ (x,y)не =0 то в т. Що існує єдина неперервна ф-ія y≥f(x) (x=ϕ(y)) така що F(x,f(x))=0, (F(ϕ(y),y)=0 y0=f(x0) (x0= ϕ(y),y)

**Теорема.** Якщо функція F(x,y) задовільняє умови теореми існування і є диференційованою за своїми змінними в т. М0 , то функція y(-f(x)) має неперервні похідні

Dy/dx= - ((dF/dx)(dF/dy)) dz/dx=- ((dF/dx)(dF/dz)) dz/dy=- ((dF/dy)(dF/dz))

Знайти частинні похідні ф – ій

А) *z=u3 lnv u=x/v v=x2y*

*Z= (x/y)3 ln (x2y)*

 *Z/x= 3(x/y)2 ln (x2y) \*(1/y)+(x/y)3 (x2 y) =3x2/x3 \* ln (x2y)+(x/y3)*

*Z/y= 3(x/y)2 ln (x2y) \*(-1/y2)+(x/y)3 (x2 / x2 y )=-3x2/y4 \* ln (x2y)+(x3/y4)*

Б)*3xyz-z3=8x*

*F=3xyz-z3 -8x*

*F/x=3yz-8 F/y=3xz F/z=3xy-3z2*

*Dz/dx= Z/x =- F/x / F/z =-(3yz-8)( 3xy-3z2)*

*Dz/dy= Z/y =- F/y/ F/z =(-3xz)( 3xy-3z2)*

*Dy/dx= - F/x/ F/y =-((3xz-8)( 3xy-3z2))/(( 3xy-3z2)( 3xz))=-(( 3yz-8)/(3yz))*

**6**)Похідна по напрямку і її властивості, частинні похідні Градієнта Теорема про похідні по напрямку диференціації функції

Похідна складного коли f(x,y,z ) з даним напрямом S визначається за формулою

Df/dS=cos(S I )df/dx+cos(S j)df/dx+cos(S k)

Похідна за даним напрямком S характеризує швидкість зміни напрямку у даній точці

Df/dS=(S grad f) або df/dx=gradSf=ПрS grad f

Частинні похідні.Градієнт.

Знайти плохідні в напрямку l=(3,4) у функції z=x3+x2y-y2 в точці P(1,0)

*Cos(і l)=(1.3+0.4)/(√1+0 \*√9+16)=3/5*

*Cos(j l)=(0.3+1.4)/(√1+0 \*√9+16)=4/5*

*Z/x= 3x2+2xyZ/x(1.0)=3*

*Z/y= x2-2y Z/y(1.0)=1*

*(Df/dl) / ϕ= 3/5\*3+4/5\*1=(9+4)/5=13/5*

**7. Частинні похідні вищих порядків. Повна похідна 2-го порядку. Теорема про рівність змішаних похідних**

Частинні похідні називаються частинними похідними 1го порядку функції . Якщо вони самі мають частинні похідні то останні називають частинними похідними 2го порядку ф-ції і позначають

При цьому ,  **-** називають чистими частинними похідними.

Так само визначаються частинні похідні вищих порядків.

 або

**Теорема**: якщо мішані частинні похідні та неперервні в т.М0 , то вони рівні в цій точці

Перекрнатись у правильності теореми про рівність змішаних похідних для ф-ції:

 *,*

Для ф-ції теорему перевірено

**8**)Екстремум функцій багатьох змінних.Необхідна і достатня умова екстремуму.Дослідження на екстремум замкнутій області.

Екстремум: необхідні умови .Функція z= F(x,y), яка є диференційованою може мати екстремум лише в точках де

Df/dx=0 та dF/dy=0 Ці точки називається стаціонарними

Достатні умови.Позначаємо через P значення похідних

*D2F/dx2 D2F/dxdy D2F/dy2*  в критичній точці (x0,y0) тоді якщо АС-В2≥0 то

*P(x0,y0)=ZMAX для A≤0*

*P(x0,y0)=ZMIN для A≥0*

Якщо АС-В2≤0 то екстремуму немає , якщо АС-В2≥0 , то екстремум може бути , а може й не бути ( невизначений випадок)

За теоремою про необхідну умову екстремуму перевірити чи може т. М (-1,6) буде точкою екстремуму для ф –ії z=x2+y2 на всій площині Оxy

*Z/x=2x*

*Z/y= 2y*

*Z/xx=2A =Z/xx(-1.6)=2*

*Z/xy=2 B= Z/xy(-1.6)=2*

*Z/y2=2C=Z/y2(-1.6)=2*

*АС-В=4-4=0*

Дана функція екстремуму може мати або не мати , функція невизначена.

**9. Первісна ф-ції на інтервалі та неозначений інтеграл, їх властивості.**

Ф-ція F назив. первісною для ф-ції ***,***на заданому проміжку, якщо для всіх ***х*** з цього проміжку справедлива рівність: ***F*΄(x)= *,***

 У загальному випадку, якщо ***F*(x)** є первісною для ф-ції ***,*** то для будь-якої сталої є функція ***F*(x) + С** також є первісною для функції

Множина всіх первісних функ-й ***ᶂ(х), Х Є (а, b)*** називають невизначеним інтегралом і записується так:

Отже, якщо є первісною для ***,***

Ф-ція  ***-***  інтегральна ф-ція

Вираз *dx* – інтегральний вираз

***Властивості***

1. Похідна від невизначеного Інтеграла дорівнює підінтегральній функції :(
2. Диференціал від невизн. інтеграла дорівнює виразу
3. Знак інтеграла перед знаком диференціала знищує останній, а при цьому вводиться довільний сталий додаток:
4. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:
5. Інтеграл від алгебраїчній сумі інтегралів від даних ф-цій:
6. **Чи є функція 3+х2 первісною для ф-ції х2 на проміжку х є R**

x2+3

 x2  функція х2+3 не є первісною для функції х

1. **Знайти за властивостями первісну для ф-ції**

**Відповідь**: С -

**10. таблиця інтегралів. Приклади з неелементарними первісними. Умови існування первісної**

1) n; 2) ; 3); 4)

 5) 6) 7)

 8) 9) 10)

 11); 12) 13)

 14)⃒+C

Прикладами є №7 та №8

**Знайти табличний інтеграл**

C

11)Методи інтегрування: підведення під знак диференціалу та заміна зміної.

Нехай *∫f(x)dx* не є табличним. Покладемо x=ɥ(t), де ɥ(t) – неперервна і раціональна функція на деякому проміжку, тоді *∫f(x)dt*, а інтеграл набуде вигляду *∫f(ɥ(t))ɥ’(t)dt=∫f(t)dt.*

Підстановку обираємо таку, щоб новий інтеграл був простійшим від попереднього.

А) Як можна перетворити вирази, з допомогою підведення під знак диференціалу.

Б)Чи правильні такі підведення під знак диференціалу.

*x2 dx=d(3x2)-* не правильне бо *d(3x2)=6xdx ≠ x3dx*

*-*не правильне (див. п.а) *dcos2x=2cosx(-sinx)dx=-sin2xdx≠*

В) Провести в інтегралі таку заміну

Підставимо

Підстановка вдала, розвязок отримали.

12) Інтегрування частинами основні типи інтегралів, в яких використовують ці методи?

 Якщо інтеграл *(f lx)dx* не є табличним, то його представляють у вигляді *∫udv=uv-∫vdu.* Тут uv- частина первісної, інтеграл *∫vdu* треба знаходити. Цей метод зручно використовувати, якщо *∫vdu* не складніше ніж *udv.* Така функція показникова, логарифмічна, тригоментрична тощо.

До яких типів належать інтеграли і як розбити підінтегральний вирази?

Підінтегральний вираз містить оберненотригометричну функцію.

13)Означення раціональної функції, правильного та неправильного раціональних дробів.

Дроби вигляду де *k≥2, A,B,a,b,c* – дійсні числа;

*D=b2-4ac0* елементами або простими дробами.

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним способом представити у вигляді суми скінченої кількості елементарних дробів

Таке представлення назив. Розкладанням правильного раціонального дробу на елементарні.

Метод знаходження невизначених коефіцієнтів у розкладі раціонального дробу на частини.

Нехай треба знайти . Якщо підінтегральний дріб є неправильним, то його завжди можна представити у вигляді алгебраїчної суми многочлена правильного раціонального дробу, тобто.

Теорема. Інтеграл від будь-якої рац. Функції цілого аргументу виражається через елементарні функції.

А)Виділити цілу частину із дробу. . Поділимо дроби…

Виходить:

Отже .

Б) Які з функцій є раціональними.

-не раціональна

- раціональна

 –не раціональна

14. Теорема про розклад многочлена на множники. Про розклад правильного раціонального дробу на прості. План інтегрування раціонального дробу. Теорема про первісну раціональну функцію.

Розклад многочлена

 На множники зводиться до рівняння

План інтегрування:

1. При інтегруванні неправильних раціональних дробів спочатку виділяють цілу частину
2. Знаменник дробу, що лишився розкладають на множники
3. Пробуємо ділити чисельник на кожен з множників знаменника
4. Розкладаємо отриманий дріб на суму простих дробів

15. Універсальна тригонометрична підстановка та інші методи інтегрування раціональних функцій від sinX, cosX..

***Теорема1***.Інтеграл від рац. Ф-цій аргументами якої є тригонометричні функції, тобто за допомогою підстановки, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно змінної t , а отже виражаються в елементарних функціях.

Дійсно

*Cos(x)*\*, x=2\**arctg(t)*,

Підставивши ці значення замість тригонометричних функцій в підінтегральних функцій в підінтегральну функцію одержуємо∫R1(t)dt. Підстановка називається універсальною тригонометричною підстановкою.

***Теорема2.*** Якщо виконується одна з рівностей

*ᶂ(-sinX,cosX)=-ᶂ(sinX,cosX)*

*ᶂ(sinX,-cosX)=-ᶂ(sinX,cosX)* то для обчислення інтеграла *∫ᶂ(sinX,cosX)dx* можна скористатись підстановкою t=cos(x) або t=sin(x).

***Теорема3.***Якщо ᶂ(-sinX,-cosX)=ᶂ(sinX,cosX) то ∫ᶂ(sinX,cosX) зводиться до інтегралу від раціональної функції tgX=t

А) Провести вдалу підстановку

=

Б) Які заміни чи методи використовувати

Ввести sinXпід знак диференціала і застосувати основну тригонометричну тотожність

 - застосувати універсальну підстановку

 ; t=sinX