16. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

***Теорема1***. Інтеграл

Підстановкою зводиться до інтеграла від раціональної ф-ції відносно t.

***Теорема2.*** Інтеграл

підстановкою , де n-кратне число n1, n2,…,зводиться до інтеграла від раціональної фукції.

А) провести вдалу підстановку =

Б) =

17. Визначений інтеграл. Означення, геом. і фізичний зміст.

Якщо існує границя інтегральної суми для λ -> 0, n-> ∞ яка не залежить від способу розбиття відрізка [а;b] і вибору точок, то ця границі назив. Визначеним інтегралом від ф-ції f(x) на відрізку [а;b] і позн. символом ∫ав f(x)dx=limSn; λ→0; n→∞. Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування. Якщо f(x) >0 то ∫ав f(x)dx чисельно = площі криволінійної трапеції обмеженої лініями у = f(x), х=а, х=в, у = 0. У цьому випадку маємо геометричний зміст визначеного інтеграла.

Фізичний зміст:

Шлях, яким рухалася точка з моменту t1 до t2 рівний інтегралу S = ∫ t1 t2 f(t)dt

 А)

Б) зобразити фігуру,площа якої виражається інтегралом ∫13 (х - 1)dx

В) ∫13(х - 1)dx = ((х2/2) - х)│13 = (9/2) – 3 – (1/2) + 1 = 4 -2 = 2(кв. од.)

18. Умови існування на властивості визн. Інтеграла.

Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування.

Властивості:

1. При перестановці мед інтегралу змінюється його знак

∫ав f(x)dx= - ∫ва f(x)dx

1. Для будь - якої ф-ції f(x)

∫аа f(x)dx = 0

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла

∫ав сf(x)dx = с∫ав f(x)dx

1. Інтеграл зі суми = сумі інтегралів

∫ав (f(x) - + g(x))dx = ∫ав f(x)dx + - ∫ав g(x)dx

1. Адитивна властивість

∫ав f(x)dx = ∫ав f(x)dx + ∫св f(x)dx, де а ≤ с ≤ в

1. Якщо f(x), g(x) – неперервні на [а, в] і f(x) ≤ g(x), то ∫ав f(x)dx ≤ ∫ав g(x)dx
2. │∫ав f(x)dx│= ∫ав │ f(x)│dx

а) чи інтегрована ф-ція f(x) = ln(х) на відрізку [-1.2]

∫-12 ln(х)dx = │u=lnx du=dx/x│= xlnx│-12  - ∫-12 x(dx/x) = xlnx│-12  - x│-12  =

 │dv=dx v=x │

X(mx-1) │-12  = 2(ln2-1)-(-1)(ln(1)- 1)=2(ln2-1)

Б) не обчислюючи порівняти

-∫13 xdx i ∫13 x2 dx

На відрізку [1.3] х ≤ х2 , а отже за ознакою № 6

∫13 xdx ≤ ∫13 x2 dx

19. Ф-ція верхньої межі інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца

Розглянемо інтеграл із змінною верхньою межею.

 *∫ а х f(t)dt*

Очевидно він є ф-цією верхньої межі. Цю ф-цію про диференціюємо.

*(∫ а х f(t)dt)’х = f(x)*

Тобто похідна від інтеграла із змінною верхньою межею = значенню підінтегральної ф – ції при цій межі.

Формула Ньютона – Лейбніца. Якщо ф-ція f(x) визначена і неперервна на відрізку [a;b], і *F’(x) = f(x), то ∫ав f(x)dx = F(x)│ab  = F (b) – F (a), де F (b), F (a)* – значення первісної в т. b i a.

Знайти похідну по змінній x з інтегралу *(∫1х(3t2+2)dt )’x = 3x2 + 2*

20. Застосування визначеного інтегралу. Формули для обчислення площ, об’ємів.

Обч. Площ плоских фігур. Нехай f(x) - ф – ція неперервна на проміку [a;b], відомо, що якщо f(x) ≥ 0 на [a;b], то площина S криволінійної трапеції, обмеженої лініями у > f(x), у = 0, х = а, х = в дорівню інтегралу S = ∫ав f(x)dx



Якщо f1(x) ≥ f2(x)

S = ∫αβ (f1(x) - f2(x))dx

Обєм тіла обертання. Обєм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ криволінійної трапеції визначається ф-лою V = ∫ab πy2dx

Навколо осі OY

V= ∫ab πx2dy

Виразити через визн. Інтеграл об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ фігури, обмеженої лініями у=0, у=х, х=1



V = ∫01πy2dx = ∫01πx2dx = πx3/3│01 = π/3(куб.од.)

21. Ознаки невласних інтегралів 1-го роду, та геометричний зміст.

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування для функції у=f(x) визначаються так:

*∫ва f(x)dx=lim ∫ва f(x)dx,*

 *b→∞*

*∫в-∞ f(x)dx=lim ∫ва f(x)dx,*

 *a→∞*

Якщо відповідна границя існує і є скінченною, то невласний інтеграл називають збіжним, в іншому випадку-розбіжним.

Геометричний зміст.

Інтеграл *∫∞0 f(x)dx*

В разі збільшення ординати площа фігури зростає, але не безмежно. У називають площею нескінченної смуги.

*Sn = ∫в-∞ f(x)dx*

Обрати серед даних інтегралів невласні інтеграли 1-го роду і виразити їх через границі:

*∫∞1 = lim∫a1*

 *a→∞*

22.Означення невласного інтеграла 2-го роду, та геометричний зміст.

Невласний інтеграл з нескінченними межами для підінтегральної функції визначається так:

*∫+∞-∞ f(x)dx=∫а-∞ f(x)dx+∫+∞а f(x)dx*

Дана сума інтегралів не залежить від вибору а.

Геометрично: площа нескінченої полоси збігання до максимально великого числа, але вона точно є обмеженою.

Якщо *= lim∫na f(x)dx* -розбіжний, то маємо невласний інтеграл 2-го роду

 n→∞

*lim∫a1 = lim(arctg(a)-arctg(1))=П/4*

 a→∞

Невласних інтегралів 2-го роду в переліку немає.

23. Означення ДР, його порядку, розв’язку, інтегралу.

Диф. Рівнянням називають р-ння, незлежну змінну,невідому функцію та її похідну або диференціали різних порядків.

Порядком диф. р-ння називається порядок найстаршої похідної, що входить до рівняння.

Розв’язком диф. р-ння називається диференційована функція, підставлення якої разом з її похідними перетворє його в тотожність.

Процес відшукання розв’язків диф. р-ння називається розв’язуванням або інтегруванням диф. р-ння.

Диф. р-ння 1-го порядку має вигляд:

*F(x,y,y’)=0*

Або y’=f(x,y)

Диф. р-ння зі змінними, що відокремлюються:

*f1 (x)g1(y)yx’+ f2 (x)g2(y)=0*

Однорідні диф. р-ння: *y’=f()*

Визначити порядок ДР *y’-2xy=0* і перевірити, чи є функція *y=ex2+3* його розв’язком.

Розв’язання :

Маємо ДР 1-го порядку,

*y’=2x\* ex2*; підставляємо в рівняння:

*2x\* ex2-2x(ex2+3  )=0;*

*0=0*

*y= ex2+3*є розв’язанням р-ння *y’-2xy=0*

24. Задача Коші. Теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші для ДР 1-го порядку.

Розглянемо р-ння =f(x,y)

Серед цих розв’язків даног р-ння знайти такий, який при заданому значенні аргумента х=х0 приймає задане значення у(х)=у0. Числа х0 та у0 називають початковими умовами.

Теорема: Якщо ф-ція f(x,y) неперервна в деякій області, що містить точки(х,у), має у цій точці обмежену частинну похідну по у, то існує тільки один розв’язок р-ння y’=f(x,y), який задовольняє умову Коші: у= у0 при х=х0

Чи виконуються умови теореми про існування і єдність розв’язку задачі Коші для такої задачі y’=, y(0)=1, в деякому околі т.(0,1)

Розв'язання:

= ; = *∫ y-2dy=∫ dx- ∫*

*= x- ln|x+1|+C = ln|x+1|-x+C*

*y=* y(0)==1 C=1 y=

В-дь: y=

25.загальний розв’язок і загальний інтеграл ДР 1-го порядку. Розв’язування задачі Коші при відомому загальному розв’язку. Частковий і особливий розв’язки.відомий загальний розвязок ДР у’-2х=0:

*у = х2 +с* . знайти розвязок задачі Коші для цього рівняння з початковою умовою у(1)=0.

 Загальним розв’язком ДР є вираз виду:

*у=f(х)+с*

,де с – const.

Розв’язати задачу Коші означає знайти єдиний розвязок,який би задовільнив умову задачі.

Наприклад прийнявши константу с=0 отримаємо у=f(х)- конкретний розвязок ДР 1-го порядку.

Якщо загальний розвязок одержано в неявному вигляді Ф(х,у,с)=0 то його називають загальним інтегралом.

Розвязок,який отримують із загального при конкретному значенні довільної сталої,називається частковим розв’язком.

Відомий аг.розвязок ДР: *у’-2х=0, у=х2+с.*

Розвяжемо задачу Коші зпочатковою умовою:

*у(1)=0*

*у(1)=12 +с=0; 1+с=0; с=-1.*

*У=х2 -1 – розвязок задачі Коші.*

26.ДР розв’язані в квадратурах. Др із зміними,що виокремлюються ДР розв’язані в квадратурах-ДР 1-го порядку,які мають вигляд , тощо

Далі ДР зводяться до обчислення простих інтегралів *g(y)dy=f(x)dx* ДР із змінними,що відокремлюються-це рівняння виду: *f1(x)g1(y)y’x + f2(x)g2(y)=0;*

ділимо на добуток функцій f1g2 і після інтегрування отримаємо:

Вибрати рівняння з відокремлюваними змінними із заданих рівнянь:

1. *y’=*
2. *x3y’ + y=6* – рівняння з відокремленими змінними
3. *y’ + + xy2 = 0*
4. *y’ +*

27.однорідні функції n-го степеня(приклад). Однорідні ДР 1-го порядку.

а) чи є однорідною і якого степеня функція ?

б) вибрати однорідне рівняння із заданих рівнянь(список в попередньому питанні).

Функція f(x,y) називається однорідною функцією n-го виміру,якщо при заміні в ній змінних х і у відповідно на tx,ty, де t-довільна величина(параметр), одержується та ж функція поміняна на tk,тобто:

*f(tx,ty)= tkf(x,y)*

показник k називають виміром,або степенем однорідної функції.

Рівняння M(x,y)dx+ N(x,y)dy = 0,в якому функції M(x,y) та N(x,y) – однорідні функції одногой того ж виміру,також є однорідними рівняннями відносно х і у.

*а)f(x,y)=;*

*f(tx,ty)=*

функція однорідна, першого виміру

б) вибрати однорідне ДР

1. *y’=*- однорідне ДР.

28.Лінійні ДР 1-го порядку. Метод варіації довільної сталої.

Вибрати лінійне рівняння із заданих рівнянь(список в попередніх питаннях)

Лінійними називають ДР яке є лінійним щодо шуканої функції та похідної, воно має вигляд:

Якщо , то рівняння називається лінійним однорідним,в іншому випадку- лінійним неоднорідним.

Метод варіації довільної сталої спочатку розв’язують відповідне однорідне ДР

*у= се*

далі С з попереднього рівняння розглядають як функцію від х, С=С(х), підбирають цю функцію так, щоб функція була розв’язком неоднорідного рівняння.

Загальний розвязок рівняння виражається формулою:

 y = *е еdx+C1)*

*Обрати лінійне рівняння*

*y’ +*

29.Лінійні ДР 1-го порядку.метод Бернуллі.Рівняння Бернуллі.

Рівняння

 *=Q(x)yn (n ≠0,n≠1)*

Називається рівнянням Бернулі.

Помножимо обидві його частини на (1-n)y- n,матимемо

*(1-n)y-n+ (1-n)y1-nP(x)=(1-n)Q(x)*

*y1-n=z,*

*(1-n)y- n*

Одержємо лінійне рівняння

Вибрати рівняння бернулі

*y’++xy2=0*

30.означення числового ряду,частинних сум,збіжності і суми ряду. Геометричний ряд.

Вираз а1+а2+…ап.= називається числовим рядом,а число а1,а2,ап –числами ряду.

Сума скінченної кількості членів ряду S1=a1, S2=a1+a2,…, Sn=a1+a2+…+an  називається частковою сумою.

Якщо існує границя S=, то ряд називається збіжним,а число S- сумою цього ряду.

Якщо не існує, або вона необмежена,то ряд називається розбіжним.

Геометричний ряд – ряд складений з членів геометричної прогресії 1,q,q2,……..

*1+q+q2+q3+…+qn-1=*

При |q|<1 –збіжний

При q=-1,q=1,q>1 –розбіжний

Знайти частинні суми S2 I S3 для ряду

*S1=2 S2=+2= S3=+==*

31.властивості рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Гармонічний ряд і його збіжність.

Властивості:

1. Члени ряду,що збігається,можна групувати в довільному порядку,зберігаючи послідовність членів,в результаті новий ряд збігається і має таку свму суму.
2. Якщо ряди збігаються, то збігається і ряд

 =.

*Якщо ряд*  збіжний,то =0.

*Гармонічний ряд : 1++++…=*

*Розглянемо послідовність часткових сум*

*Sn=1+++…+, нехай n>2m; m>2a, тоді*

*Sn=(1+)+()+()+…++2\*+4\*+…+2m-1=*

*Оскільки m>2a, то Sn>a де а –будь-яке число. Отже гармонічний ряд збіжний.*

*а) чи працює необхідна ознака?*

*; ==--ознака не працює.*

*б) чи збігається ряд = =0*

*Отже,за необхідних умов ряд збіжний*