**Тема 4:Математичні моделі детермінованих сигналів. Загальна характеристика сигналів. Узагальнений ряд Фур`є.**

Сигнал - це фізичний процес, який несе інформацію.

Математична модель – дозволяє зробити сигнал об`єктом теоретичного вивчення і розрахунків. Це функціональна залежність, де аргументом являється час.

Звичайно вивчають такі властивості сигналу, які об`єктивно виступають як найбільш важливі.

Розглянемо деякі основні види сигналів:

1. Одномірні сигнали – напруга чи струм

Багатовимірні сигнали – утворюються множиною деяких одномірних сигналів: , де N-розмірність сигналу.

Приклад: система напруг на клемах багатополюсника.

Багатовимірний сигнал – впорядкована сукупність одномірних сигналів.

{}≠{}

Застосування багатовимірних сигналів доцільно при використанні для аналізу складних систем, наприклад ЕОМ.

1. а)Детерміновані сигнали – це сигнали , параметри яких можуть бути визначені з ймовірністю рівною одиниці в будь-який момент часу.

Приклад: це можуть бути імпульси(пачки імпульсів) відомої форми і розміщення в часі, а також неперервні сигнали із заданими амплітудними і фазними співвідношеннями всередині його спектру.

б)Випадкові сигнали – функція часу, значення якої завчасно передбачені бути не можуть(або передбачаються з ймовірністю <1).

Приклад: це може бути електрична напруга, яка відповідає мові; послідовність кодів на вході багатоканального приймача тощо. Власне будь-який сигнал, який несе інформацію, повинен розглядатися як випадковий.

в)Окремо виділяються випадкові сигнали та шуми.

Для аналізу випадкових сигналів визначають:

а)Закон розподілу ймовірностей, на підставі якого визначають час прибуття сигналу в певному діапазоні рівнів.

б)Спектральний розподіл потужності сигналу(тобто розподіл середньої потужності сигналу по частотам).

3. Періодичні сигнали – задовольняють умову , де

T – період(скінченне число); k – будь-яке ціле число.

Неперіодичний сигнал – сигнал, для якого не виконується умова . Періодичний детермінований сигнал – це гармонічне коливання.

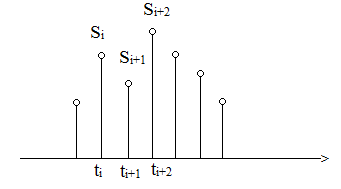
при

Спектр такого коливання – одна єдина лінія. У реальних сигналах, які мають початок і кінець, спектр розмивається.

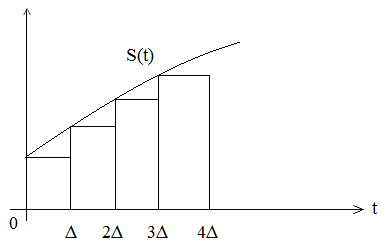
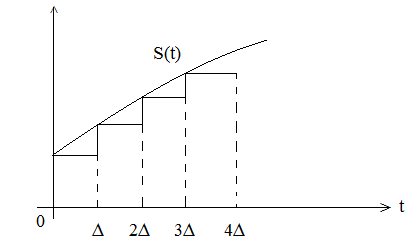
Будь – який складний сигнал можна представити у вигляді суми гармонічних коливань з частотами k\*Ω, тобто кратними Ω=2\*π/T. Це спектральна функція, яка містить інформацію про амплітуди та фази окремих гармонік сигналу.

4. Аналогові, дискретні та цифрові сигнали

Аналогові сигнали – це сигнали, значення яких можна виміряти в будь – який момент часу.

Дискретний сигнал утворюється скінченною множиною точок на осі часу, де кожній з них відповідають відлікові значення сигналу Si .  
Цифрові сигнали – відлікові значення представляються у формі чисел.

Динамічне представлення сигналу

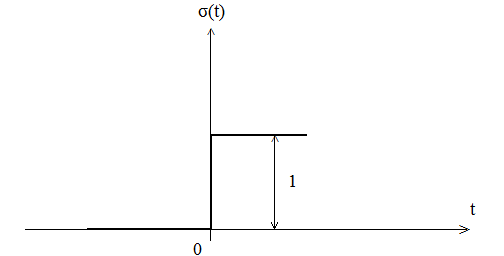


а)Сходинки; б)Імпульси

Сигнал може бути представлений сумою деяких елементарних сигналів, які виникають в послідовні моменти часу.

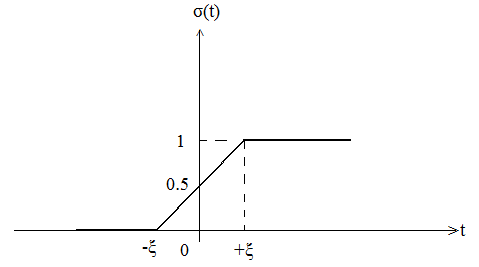
Вибір елементарних сигналів в принципі довільний. Розглянемо деякі елементарні сигнали.

Функція включення(функція Хевісайда)

σ(t) – скачок функції здійснюється миттєво.

Олівер Хевісайд – англійський фізик (1850-1925).

Реально функція включення виглядає так:

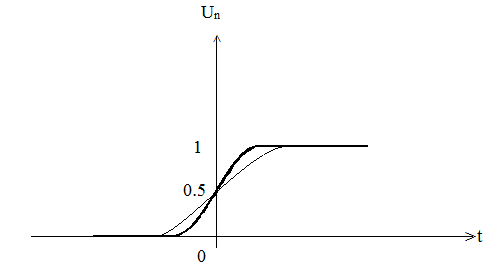


Прихід із «нульового» стану в «одиничний» відбувається навпротязі 2\*ξ.

Коли параметр ξ͢→0, то процес переходу із одного стану в інший здійснюється миттєво. Це буде вже функція включення, за допомогою якої зручно описувати процеси в електричних колах.

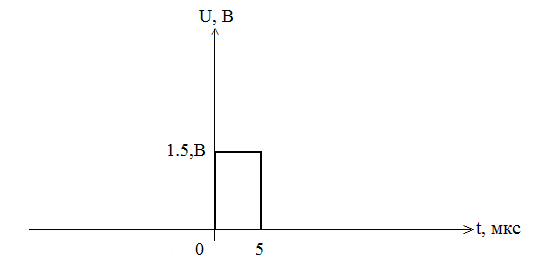
Наступна відносно початку координат функція включення

Другий спосіб запису

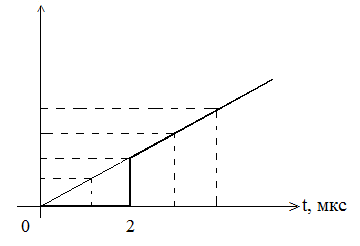


Чим більше n, тим точніша апроксимація сигналу.

Приклад 1: Описати аналітично

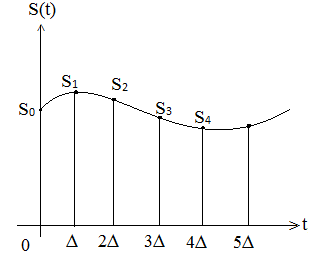


Приклад 2: Джерело ЕРС (електрорушійної сили) e(t)=3\*106\*t, B під`єднується ідеальним ключем в момент t0=2мкс. Описати напругу на виході.

, B

При t<2мкс, U(t)=0.

Динамічне представлення довільного сигналу за допомогою функції включення

Сигнал при будь – якому t може бути представлений як сума сигналів в момент часу (0,∆,2∆…).

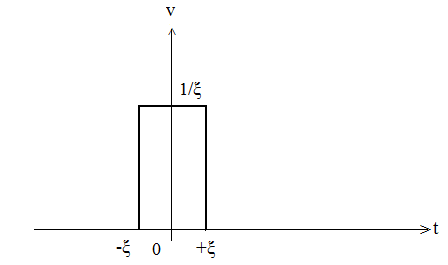
Якщо ∆→0, то дискретну змінну k∆ можна замінити змінною τ. Малі прирости диференційні ds=(ds/dt)\*dτ.

І тепер:

Приклад. Нехай S(t)=0 при t<0. А при t>0, S(t)=A\*t2. Знайти аналітичне представлення.

Тут S0=0 dS/dt=d(A\*t2)/dτ=2\*A\*τ. Тому .

Дельта – функція



При будь – якому виборі ξ площа дельта – функції рівна 1. Якщо ξ→0, тоді перетворюється в дельта – імпульс.

Розклад сигналу по заданій системі функцій. Ортогональні функції.

Важливе значення має розклад сигналу по різних системах ортогональних функцій.

Нескінченна система дійсних функцій φ0(x), φ1(x), φ2(x),…, φn(x).. називається ортогональною на відрізку [a,b], якщо

, при m≠n

При цьому допускається, що ніяка функція φn(x) не рівна тотожно, тобто

Норма функції φn(x) ;

Функція називається нормованою, якщо 2=1, тобто

Система нормованих функцій, з яких кожні дві попарно ортогональні, називається ортонормованою.

Узагальнений ряд Фур`є

В математиці доведено, що довільна кусково – неперервна функція f(x), для якої виконується умова:

може бути представлена за допомогою неперервних ортогональних функцій φ0(x), φ1(x), φ2(x),…, φn(x).. у вигляді суми ряду

Ci – коефіцієнт ряду

Тобто f(x)= C0 φ0(x)+ C1φ1(x)+ C2 φ2(x)+…+ Cnφn(x)..

Помножимо обидві частини рівняння на і про інтегруємо в інтервалі [a,b] . Всі доданки виду при m≠n перетворюються в нуль в силу ортогональності функцій та . В правій частині залишається лише один доданок :

Це дозволяє нам написати :

Ряд, в якому коефіцієнти визначені за наведеною формулою, називається загальним рядом Фур`є по даній системі.

Властивості узагальненого ряду Фур`є. Нерівність Бесселя.

При заданій системі функцій і фіксованому числі елементів ряду N ряд Фур`є забезпечує найкращу апроксимацію(в сенсі мінімуму середньоквадратичної похибки) даної функції f(x).

Середньоквадратична похибка ряду М досягає мінімуму при an=Cn.

Підставляєм в М значення an=Cn+bn. Тоді :

Переписуємо цей вираз з врахуванням того , що:

*;*

Зауваження: буде містити складові виду

в силу ортогональності.

Тому надалі будемо рахувати, що у цьому виразі залишаються лише

Тому:

Звідси слідує, що похибка апроксимації М буде мінімальною при рівності 0 останнього члена виразу. Тобто:

*–* мінімальна СК похибка .

Враховуючи цю обставину, що >=0, можна записати наступну рівність:

Це є нерівність Бесселя, яка справедлива для будь – якої системи ортогональних функцій.

Ортогональна система є повною, якщо зі збільшенням числа її членів середньоквадратичну похибку апроксимації М можна зробити скільки завгодно малою. Умова повної системи:

При виконанні умови повноти можна рахувати, що ортогональний ряд Фур`є сходиться в середньому, тобто що :

Узагальнений ряд Фур`є для сигналів часу s(t)

Застосовуючи до сигналів s(t) ряд Фур`є можна записати так:

S(t)=

Тоді цей вираз може мати енергетичний зміст. Дійсно можна записати:

Коли рахувати, що S(t) це струм чи напруга, тоді є не що інше, як енергія сигналу в проміжку на опорі 1Ом.

Таким чином енергію сигналу можна представити в системі ортогональних функцій.

, а при використанні ортонормованої системи:

При цьому інтервал повинен бути інтервалом ортогональності для вибраної системи функцій.

Очевидно, що середня за час потужність сигналу:

Лінійний простір сигналів

Лінійний простір сигналів існує при виконанні наступних систем:

1.Будь – який сигнал uM при будь – яких t приймає лише дійсні значення.

2.Для будь – яких uM і vM існує сума ω=u+v, при чому ω також міститься в М. При цьому операція додавання:

- комутативна : u+v=v+u; -асоціативна: u+(v+x)=(u+v)+x

3.Для будь – якого сигналу sM і будь – якого зважуваного числа α визначений сигнал f=dsM.

4.Множина М містить особливий нульовий елемент φ, такий що u+φ=u для всіх uM.

Елементи лінійних просторів називаються векторами, щоб підкреслити аналогію між об`єктами лінійних просторів, векторами в математиці.

Коли розглядати математичні моделі сигналів, які приймають комплексні значення, і припустити в аксіомі 3 перемноження на комплексні числа, це – комплексний лінійний простір.

Координатний базис

Лінійний простір сигналу – це простір, де над сигналами можуть виконуватися лінійні операції. Лінійний простір може бути доповнений спеціальною структурою, яка відіграє роль системи координат.

Лінійно незалежним координатним базисом називається сукупність векторів {e1,e2,e3…}, які належать простору М, якщо

Лише у випадку одночасного перетворення в нуль всіх числових коефіцієнтів .

Якщо дано розклад деякого синалу S(t) у вигляді , то числа {C1,C2….} являються проекціями сигналу S(t) відносно вибраного координатного базису.

Коли число базисних векторів наближено велике, то такий скінченний простір називають безмежним.

Приклад: Якщо лінійний простір утворено сигналами, які описуються многочленами n-го порядку , то координатним базисом буде система одночленів {e0=1;e1=t;e2=t2;…..}.

Нормований лінійний простір

Норма – аналог довжини вектора в математиці.

Лінійний простір сигналів L є нормованим, якщо кожному сигналу s(t)L однозначно співставлено число - норма цього вектора, при цьому мають виконуватися аксіоми:

1. Норма невід`ємна, тобто , при чому тоді і лише тоді, коли s=φ.
2. Для будь – якого сигналу, помноженого на деяке число α –

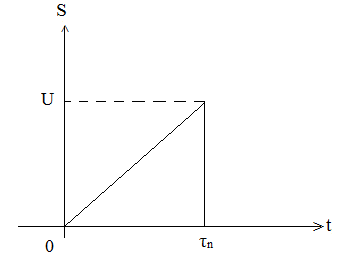
1. Коли s(t) та p(t) - два сигнали з простору L , то виконується нерівність трикутника:

В радіотехніці , при чому беруться лише додатні значення кореня.

Для комплексних сигналів:

Квадрат норми сигналу рівний його енергії:

Приклад: Обчислимо енергію і норму сигналу s(t)=u\*t/τn



;

Метричні простори

Введення поняття МП дозволяє узагальнити нашу уяву про відстань між точками в просторі.

Лінійний простір L стає метричним, якщо кожній парі елементів u та v співставлень невід`ємне число ρ(u,v), яке називається метрикою чи відстанню між цими елементами.

Метрика повинна відповідати аксіомам:

1. Рефлективність метрики ρ(u,v) = ρ(v,u);
2. ρ(u,u)=0 при будь – яких uL;
3. Коли елемент ωL, тоды завжди ρ(u,v)≤ ρ(u,v)+ ρ(ω,v);

Звичайно метрику визначають як норму різниці двох сигналів:

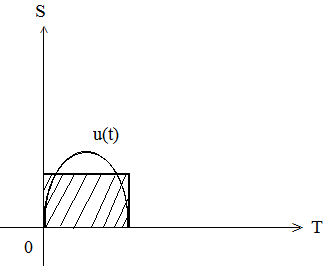
ρ(u,v)=

І тоді норму можна розуміти як відстань між вибраним елементом та нульовим елементом: = ρ(u,φ)==

Поняття метрики дозволяє говорити про те, наскільки один сигнал добре апроксимує інший.

Приклад: u(t) – відрізок синусоїди , при 0≤t≤T

Вибрати амплітуду прямокутного імпульсу так, щоб забезпечити мінімальну відстань між цими сигналами.

Квадрат відстані між сигналами:

Дослідження цього виразу на екстремум показує, що мінімальна відстань буде досягатися при: A=2\*u/π=0.637\*u. При цьому :

;

Відзначимо, що енергія синусоїдального імпульса:

(тобто квадрат норми).

А норма : ; Тобто в рамках вибраної нами метрики мінімальна відстань між двома сигналами складає 44% від норми синусоїдального імпульсу.

Теорії ортогональних сигналів. Скалярний добуток сигналів.

Коли в звичайному тривимірному просторі відомі два вектори і , тоді квадрат модуля їх суми:



де ( )= - скалярний добуток цих векторів, який залежить від кута ψ між ними.

За аналогією обчислимо енергію суми двох сигналів u та v:

, тобто



На відміну від самих сигналів їх енергія неадитивна – енергія сумарного сигналу містить в собі взаємну енергію.

Порівнюючи формули 1 та 2 визначимо скалярний добуток сигналів u та v:



А також косинус кута між ними:

Скалярний добуток володіє наступними очевидними властивостями:

1. (u,v)≥0;
2. (u,v)=(v,u);
3. (λu,v)=λ(u,v), де λ – будь – яке число; 
4. (u+v,ω)=(u,ω)+(v,ω).

Девід Гільберт (1862-1943) – німецький математик.

Дійсний гільбертовий простір – це такий простір, в якому введено сумарний добуток 3, при чому справедливі умови 4.

Н – позначення гільбертового простору.

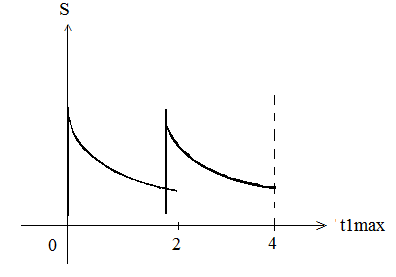
В математиці доведено, що в гільбертовому просторі справедлива нерівність Коші - Буняковського.

Якщо ці сигнали приймають комплексні значення, то визначають комплексний гільбертовий простір.

Приклад: Є два зміщених в часі експоненційних імпульса напруги

u1(t)=

u2(t)=

Знайти скалярний добуток а також кут між ними.

Енергія цих сигналів однакова:

Скалярний добуток:

Звідки:

Ортогональні сигнали та узагальнені ряди Фур`э

Два сигнали u та v називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток рівний нулю(а значить і взаємна енергія).

Ці сигнали «гранично» не подібні один на одного.

Узагальнений ряд Фур`є дає можливість характеризувати сигнали скінченою(але, взагальному, нескінченною) системою коефіцієнтів узагальненого ряду Ck, які представляють собою проекції вектора s(t) в гільбертовому просторі Н на базисні напрямки.

Приклад ортогонального базису

Сукупність гармонічних сигналів складає ортогональний координатний базис.

Інтервал ортогональності рівний періоду:

T=2\*π/ω1

Квадрат норми

Норма гармонічного ортогонального сигналу:

Ортонормовані базиси

Способи побудувати нескінченні системи функцій детально вивчені в математиці.

Вибір найбільш раціональної ортогональної системи функції залежить від мети, яку потрібно досягнути при розкладі складної функції(сигналу) в ряд. Серед різноманітних задач, які вимагають розкладу складного сигналу, найбільш важливими є:

1. Точний розклад на дискретні ортогональні складові;
2. Апроксимація сигналу мінімальною кількістю складових( при заданій допустимій похибці).

При першій постановці задачі найбільше розповсюдження отримала ортогональна система основних тригонометричних функцій – синуса і косинуса. Гармонічне коливання зберігає свою форму при проходженні через лінійні кола, а розклад на синус і косинус дозволяє використовувати символьні методи.

При другій постановці задачі застосовуються різноманітні ортогональні і ортонормовані системи функцій : поліноми Чебешева, Еліта, Лагерра, функції Хаара, Уолша та інші.

Ортонормована система гармонічних сигналів

Систематригонометричних функцій з крайніми частотами, доповнена постійним в часі сигналом u0 утворює ортонормований базис.

Квадрат норми кожної з цих

функцій =1 незалежно від

….. номера функцій.

Система функцій Уолша

В інтервалі свого існування (-T/2;T/2) вони приймають лише значення . Введемо безрозмірний час Ѳ=t/T; будемо позначати k-y функцію Уолша wal(k,Ѳ).

Номер функції k рівний числу змін знаку на інтервалі її існування.

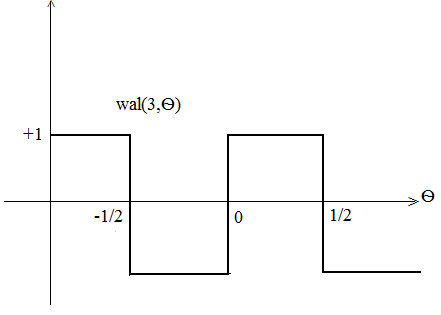
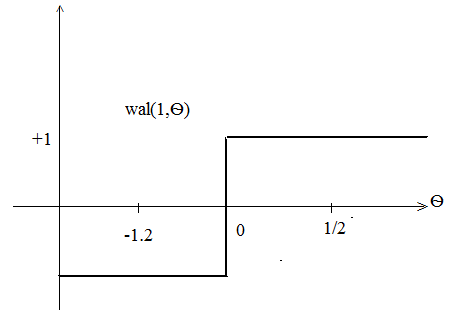
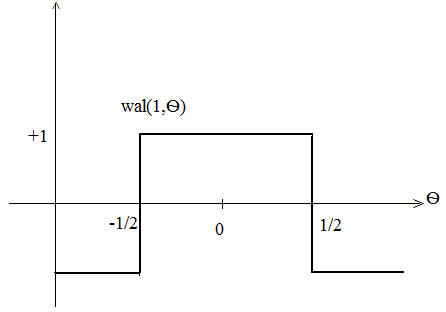
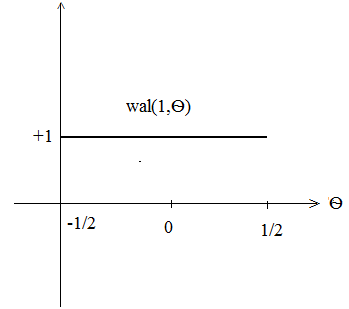


Рис.Графіки перших чотирьох функцій Уолша.

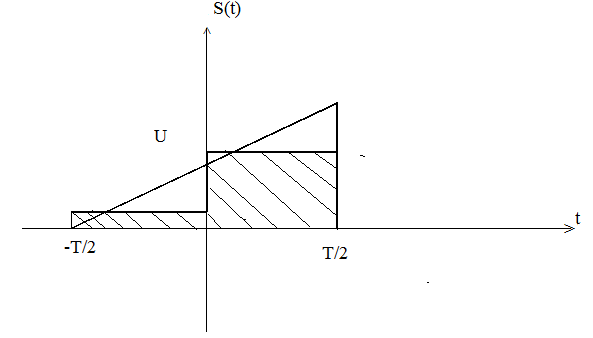
Умова нормування функцій Уолша при будь – якому значенні k:

Ортогональність забезпечується принципом їх побудови і може бути перевірена безпосередньо:

Розклад сигналу із скінченною енергією , заданою на інтервалі часу [-T/2;T/2] в узагальнений ряд Фур`є по функції Уолша має вигляд:

Приклад: знайти перші два коефіцієнти в розкладі імпульса трикутної форми по системі функцій Уолша. В інтервалі [-T/2;T/2] сигнал описується

S(t)=(u/T)\*(t+T/2)

**

Тобто при апроксимації ми отримуємо ступінчасту криву, але з точки зору енергетичної ця похибка не така вже велика. Дійсно, енергія імпульса:

Енергія різниці:

І складає лише 1/16 або 6.25% від енергії синусоїдального імпульсу.