**1.Функції** багатьох змінних. Графік функції двох змінних.

Величина z називається ф-цією двох змінних величин x,y, якщо кожній парі чисел, які можуть бути значеннями змінних x,y, відповідає одне або декілька визначених значень величини z. При цьому змінні x,y, назив аргументами.

Поняття ф-ції трьох і більше аргументів і її область визначення вводиться аналогічно ф-ції двох аргументів.

Ф-цією двох і більше аргументів можна задати таблично у вигляді просторової моделі .

Область визначення двох змінних плюс пари тих чисел, які можуть бути значеннями аргументів x,y, функції f(x,y,).

Графіком функції двох змінних z=f(x,y,) є деяка повехня S в прямокутній системі координат OXYZ; Проекція точки М поверхні S на площину XOYє зображеннями аргументів x,y, апліката z точки М відображає відповідне значення функції.

Які з величин є функціями n змінних? Вказати n.

А) Довжина кола *l=2ПR* – функція однієї змінної n=1.

Б) Об’єм конуса

V – двох змінних n=2.

В) Потенціальна енергія тіла.

u=u(u1,u2,u3) – багатьох змінних.

**2. Границя** функції двох змінних. Неперервність в точці і в області.

Поняття границі функції двох аргументів встановлюється так, як і для функції одного аргументу. Число *l* називається границею функції z=f(x,y,) в точці М0(а,в) якщо z прямує до *l* коли точка М(х,у) прямує до М0.

=*l* або =*l*

Вважається, якщо ф-ція визначена у всіх точках в околі точки М0.

Визначення: число *l* називається границею функції f(x,y,) в точці М0(а,в), якщо значення різниці f(x,y,)- *l* залишається меншим ніж попередньо встановлене додатнє число *Е* у випадку коли відстань М0М= від точки М0(а,в) до точки М(х,у) менше за деяке додатне число *Е* .

Геометричний зміст.

Апліката поверхні z=f(x,y,) відрізняються від *l* менше ніж на *Е* як тільки проекція точки, яка лежить на поверхні, потрапляє в середину кола радіуса з центром в точці М0(а,в)

А) Намалювати окіл точки М(3,2) при *Е*=1/2.

 у

 2 .

 3 х

Б) Знайти границю ф-ції в точці за теоремою про арифметичні дії з границями:

 = = =

Відповідь:

**3. Часткові прирости**. Частинні похідні, градієнт.

Нехай функція f кількох змінних визначена в точках (х0,у0,….z0) є Rn та (х,у,…z) є Rn. Тоді різниця -х0, = у-у0, =z-z0 – називають відповідно приростами відповідних змінних х,у,…z.

Якщо = 0…….. = 0, то різницю:

f(х0,у0,….z0)=f(x+x0, у0,….z0)- f(х0,у0,….z0) – називають частинним приростом ф-ції f по змінній ху трчці (х0,у0,z0).

Аналогічно визначаються частинні прирости функції f в точці (х,у,z) по змінній у,….,z.

f(х0,у0,….z0),….,f(х0,у0,….z0)

Частинною похідною по змінній х ф-ції в точці (х0,у0,….z0) називають число

f’(х0,у0,….z0)= = .

Якщо частинні похідні позначають у будь-якій точці з області визначення ф-ції, то їх позначають так:

f’х, f’у,…., f’z або ,,…,.

Градієнт – вектор визначений у кожній точці скалярного поля формулою.

gradf= + +

У кожній точці скалярного поля вектор gradf напрямлений до нормалі до поверхні рівня , що проходить через дану точку М.

Знайти частковий приріст і похідну по змінній х за означенням, якщо z=x2+2xy

f(х,у)=Z=((x+)y=х2+2х+2+2ху+2у=х2+2(х+у)+2+2ху

f’х = Z’x+ = =++2xy+= 2(x+y).

**4**)Повний приріст . Озн . диф. функції в точці та диференціалу ф-ції 2 –х змінних. Формула для диференціалу через частині похідні та інваріантність форми диференціалу.

Повним приростом ф-ії f у точці (x0,y0,z0) називається рівняння ∆ f(x0,y0,z0) =f(x,y,z) -f(x0,y0,z0) = f(x0+ ∆x, y0 +∆y, z0 +∆z) = f(x0,y0,z0)

Функція z= f (x,y) називається диференційованою в точці (x0,y0 ) якщо повний приріст функції z можна записати у вигляді

∆ z=A(x0,y0 ) ∆x +B(x0,y0 ) ∆y+O(g)

g=√∆x2+∆y2 де O(g)—величина яка нескінченно малого вищого порядку порівняно з g

Повним диференціалом dz функції в т. (x0,y0 ) називається величина

Dz=df (x0,y0 )=df/dx(x0,y0 ) dx+ df/dy (x0,y0 ) ∆y

Dz=f ‘x (x0,y0 ) dx+ f ‘y(x0,y0 ) dy де dx і dy –диференціали незалежних з.

Універсальність форми диференціалу

D2z/dxdy=d2z/dydx

Знайти повний приріст ( повний диференціал функції за озн. Z=(x-1)2+2y2

∆ z=(x+∆ x-1)2+2(y+y2)2-(x-1)2-2y2=(x-1)2 +2∆ x (x-1)+ ∆ x2+2y2+4y∆ y+2∆ y2-(x-1)2-2y2=2∆ x(x-1)+ ∆ x2+4y∆ y+2∆ y2

Zx’=2(x-1)=

Zy’==4y

Dz= 2x(x-1)dx+4ydy

**5)**Частинні похідні складної функції багатьох змінних та похідні неявно заданих функцій , якщо

z=z(x,y) x=x(t) y=y(t ) тоді dz/dt=dz/dx\*dy/dt+dzdy\*dydt

Якщо z=z (x,y) y=y(x) тоді dz/dx= dz/dx+dz/dy\*dy/dx

Якщо z=z(x,y), x=x(u,v) y=y(u,v) тоді частинні похідні за незалежними змінними u і v у довільній точці (u,v) знаходяться так

Dz/du=(dz/dx)(dx/du)+(dz/dy)(dy/du)

Dz/dv=(dz/dx)(dx/dv)+(dz/dy)(dy/dv)

Похідна неявних функцій.

**Теорема.** Якщо функція f(x,y)=0, задовільняє умови

---існує т. М0(x0,y0)=0

---в колі т. М0  ф-ія F (x,y)=0 та частинні похідні FX і FY неперервні

--- F’ (x,y)не =0 то в т. Що існує єдина неперервна ф-ія y≥f(x) (x=ϕ(y)) така що F(x,f(x))=0, (F(ϕ(y),y)=0 y0=f(x0) (x0= ϕ(y),y)

**Теорема.** Якщо функція F(x,y) задовільняє умови теореми існування і є диференційованою за своїми змінними в т. М0 , то функція y(-f(x)) має неперервні похідні

Dy/dx= - ((dF/dx)(dF/dy)) dz/dx=- ((dF/dx)(dF/dz)) dz/dy=- ((dF/dy)(dF/dz))

Знайти частинні похідні ф – ій

А) z=u3 lnv u=x/v v=x2y

Z= (x/y)3 ln (x2y)

 Z/x= 3(x/y)2 ln (x2y) \*(1/y)+(x/y)3 (x2 y) =3x2/x3 \* ln (x2y)+(x/y3)

Z/y= 3(x/y)2 ln (x2y) \*(-1/y2)+(x/y)3 (x2 / x2 y )=-3x2/y4 \* ln (x2y)+(x3/y4)

Б)3xyz-z3=8x

F=3xyz-z3 -8x

F/x=3yz-8 F/y=3xz F/z=3xy-3z2

Dz/dx= Z/x =- F/x / F/z =-(3yz-8)( 3xy-3z2)

Dz/dy= Z/y =- F/y/ F/z =(-3xz)( 3xy-3z2)

Dy/dx= - F/x/ F/y =-((3xz-8)( 3xy-3z2))/(( 3xy-3z2)( 3xz))=-(( 3yz-8)/(3yz))

**6**)Похідна по напрямку і її властивості, частинні похідні Градієнта Теорема про похідні по напрямку диференціації функції

Похідна складного коли f(x,y,z ) з даним напрямом S визначається за формулою

Df/dS=cos(S I )df/dx+cos(S j)df/dx+cos(S k)

Похідна за даним напрямком S характеризує швидкість зміни напрямку у даній точці

Df/dS=(S grad f) або df/dx=gradSf=ПрS grad f

Частинні похідні.Градієнт.

Знайти плохідні в напрямку l=(3,4) у функції z=x3+x2y-y2 в точці P(1,0)

Cos(і l)=(1.3+0.4)/(√1+0 \*√9+16)=3/5

 Cos(j l)=(0.3+1.4)/(√1+0 \*√9+16)=4/5

 Z/x= 3x2+2xyZ/x(1.0)=3

Z/y= x2-2y Z/y(1.0)=1

(Df/dl) / ϕ= 3/5\*3+4/5\*1=(9+4)/5=13/5

**7. Частинні похідні вищих порядків. Повна похідна 2-го порядку. Теорема про рівність змішаних похідних**

Частинні похідні називаються частинними похідними 1го порядку функції . Якщо вони самі мають частинні похідні то останні називають частинними похідними 2го порядку ф-ції і позначають

При цьому ,  **-** називають чистими частинними похідними.

Так само визначаються частинні похідні вищих порядків.

 або

**Теорема**: якщо мішані частинні похідні та неперервні в т.М0 , то вони рівні в цій точці

Перекрнатись у правильності теореми про рівність змішаних похідних для ф-ції:

 ,

Для ф-ції теорему перевірено

**8**)Екстремум функцій багатьох змінних.Необхідна і достатня умова екстремуму.Дослідження на екстремум замкнутій області.

Екстремум: необхідні умови .Функція z= F(x,y), яка є диференційованою може мати екстремум лише в точках де

Df/dx=0 та dF/dy=0 Ці точки називається стаціонарними

Достатні умови.Позначаємо через P значення похідних

D2F/dx2 D2F/dxdy D2F/dy2 в критичній точці (x0,y0) тоді якщо АС-В2≥0 то

P(x0,y0)=ZMAX для A≤0

P(x0,y0)=ZMIN для A≥0

Якщо АС-В2≤0 то екстремуму немає , якщо АС-В2≥0 , то екстремум може бути , а може й не бути ( невизначений випадок)

За теоремою про необхідну умову екстремуму перевірити чи може т. М (-1,6) буде точкою екстремуму для ф –ії z=x2+y2 на всій площині Оxy

 Z/x=2x

Z/y= 2y

Z/xx=2A =Z/xx(-1.6)=2

Z/xy=2 B= Z/xy(-1.6)=2

Z/y2=2C=Z/y2(-1.6)=2

АС-В=4-4=0

Дана функція екстремуму може мати або не мати , функція невизначена.

**9. Первісна ф-ції на інтервалі та неозначений інтеграл, їх властивості.**

Ф-ція F назив. первісною для ф-ції ***,***на заданому проміжку, якщо для всіх ***х*** з цього проміжку справедлива рівність: ***F*΄(x)= *,***

 У загальному випадку, якщо ***F*(x)** є первісною для ф-ції ***,*** то для будь-якої сталої є функція ***F*(x) + С** також є первісною для функції

Множина всіх первісних функ-й ***ᶂ(х), Х Є (а, b)*** називають невизначеним інтегралом і записується так:

Отже, якщо є первісною для ***,***

Ф-ція  ***-***  інтегральна ф-ція

Вираз *dx* – інтегральний вираз

***Властивості***

Похідна від невизначеного Інтеграла дорівнює підінтегральній функції :(

Диференціал від невизн. інтеграла дорівнює виразу

Знак інтеграла перед знаком диференціала знищує останній, а при цьому вводиться довільний сталий додаток:

Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

Інтеграл від алгебраїчній сумі інтегралів від даних ф-цій:

**Чи є функція 3+х2 первісною для ф-ції х2 на проміжку х є R**

x2+3

 x2  функція х2+3 не є первісною для функції х

**Знайти за властивостями первісну для ф-ції**

**Відповідь**: С -

**10. таблиця інтегралів. Приклади з неелементарними первісними. Умови існування первісної**

 1) n; 2) ; 3); 4)

 5) 6) 7)

 8) 9) 10)

 11); 12) 13)

 14)⃒+C

Прикладами є №7 та №8

**Знайти табличний інтеграл**

C

11)Методи інтегрування: підведення під знак диференціалу та заміна зміної.

Нехай *∫f(x)dx*не є табличним. Покладемо x=ɥ(t), де ɥ(t) – неперервна і раціональна функція на деякому проміжку, тоді *∫f(x)dt*, а інтеграл набуде вигляду *∫f(ɥ(t))ɥ’(t)dt=∫f(t)dt.*

Підстановку обираємо таку, щоб новий інтеграл був простійшим від попереднього.

А) Як можна перетворити вирази, з допомогою підведення під знак диференціалу.

Б)Чи правильні такі підведення під знак диференціалу.

*x2dx=d(3x2)-*не правильне бо *d(3x2)=6xdx≠x3dx*

*-*не правильне (див. п.а) *dcos2x=2cosx(-sinx)dx=-sin2xdx≠*

В) Провести в інтегралі таку заміну

Підставимо

Підстановка вдала, розвязок отримали.

12) Інтегрування частинами основні типи інтегралів, в яких використовують ці методи?

 Якщо інтеграл *(flx)dx*не є табличним, то його представляють у вигляді *∫udv=uv-∫vdu.*Тут uv- частина первісної, інтеграл *∫vdu*треба знаходити. Цей метод зручно використовувати, якщо *∫vdu*не складніше ніж*udv.*Такафункціяпоказникова, логарифмічна, тригоментричнатощо.

До якихтипів належать інтеграли і як розбити підінтегральнийвирази?

Підінтегральний вираз містить оберненотригометричну функцію.

13)Означення раціональної функції, правильного та неправильного раціональних дробів.

Дроби вигляду де *k≥2, A,B,a,b,c*–дійсні числа;

*D=b2-4ac0* елементами або простими дробами.

Теорема. Будь-який правильний раціональний дріб можна єдиним способом представити у вигляді суми скінченої кількості елементарних дробів

Таке представлення назив. Розкладанням правильного раціонального дробу на елементарні.

Метод знаходження невизначених коефіцієнтів у розкладі раціонального дробу на частини.

Нехай треба знайти . Якщо підінтегральний дріб є неправильним, то його завжди можна представити у вигляді алгебраїчної суми многочлена правильного раціонального дробу, тобто.

Теорема. Інтеграл від будь-якої рац. Функції цілого аргументу виражається через елементарні функції.

А)Виділити цілу частину із дробу. . Поділимо дроби…

Виходить:

Отже .

Б) Які з функцій є раціональними.

-не раціональна

- раціональна

 –не раціональна

14. Теорема про розклад многочлена на множники. Про розклад правильного раціонального дробу на прості. План інтегрування раціонального дробу. Теорема про первісну раціональну функцію.

Розклад многочлена

 На множники зводиться до рівняння

План інтегрування:

1. При інтегруванні неправильних раціональних дробів спочатку виділяють цілу частину
2. Знаменник дробу, що лишився розкладають на множники
3. Пробуємо ділити чисельник на кожен з множників знаменника
4. Розкладаємо отриманий дріб на суму простих дробів

15. Універсальна тригонометрична підстановка та інші методи інтегрування раціональних функцій від sinX, cosX..

***Теорема1***.Інтеграл від рац. Ф-цій аргументами якої є тригонометричні функції, тобто за допомогою підстановки, зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно змінної t , а отже виражаються в елементарних функціях.

Дійсно

Cos(x)\*, x=2\*arctg(t),

Підставивши ці значення замість тригонометричних функцій в підінтегральних функцій в підінтегральну функцію одержуємо∫R1(t)dt. Підстановка називається універсальною тригонометричною підстановкою.

***Теорема2.*** Якщо виконується одна з рівностей

ᶂ(-sinX,cosX)=-ᶂ(sinX,cosX)

ᶂ(sinX,-cosX)=-ᶂ(sinX,cosX) то для обчислення інтеграла ∫ᶂ(sinX,cosX)dx можна скористатись підстановкою t=cos(x) або t=sin(x).

***Теорема3.***Якщо ᶂ(-sinX,-cosX)=ᶂ(sinX,cosX) то ∫ᶂ(sinX,cosX) зводиться до інтегралу від раціональної функції tgX=t

А) Провести вдалу підстановку

=

Б) Які заміни чи методи використовувати

Ввести sinXпід знак диференціала і застосувати основну тригонометричну тотожність

 - застосувати універсальну підстановку

 ; t=sinX

16. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

***Теорема1***. Інтеграл

Підстановкою зводиться до інтеграла від раціональної ф-ції відносно t.

***Теорема2.*** Інтеграл

підстановкою , де n-кратне число n1, n2,…,зводиться до інтеграла від раціональної фукції.

А) провести вдалу підстановку

=

Б) =

17. Визначений інтеграл. Означення, геом. і фізичний зміст.

Якщо існує границя інтегральної суми для λ -> 0, n-> ∞ яка не залежить від способу розбиття відрізка [а;b] і вибору точок, то ця границі назив. Визначеним інтегралом від ф-ції f(x) на відрізку [а;b] і позн. символом ∫ав f(x)dx=limSn; λ→0; n→∞. Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування. Якщо f(x) >0 то ∫ав f(x)dx чисельно = площі криволінійної трапеції обмеженої лініями у = f(x), х=а, х=в, у = 0. У цьому випадку маємо геометричний зміст визначеного інтеграла.

Фізичний зміст:

Шлях, яким рухалася точка з моменту t1 до t2 рівний інтегралу S = ∫ t1 t2 f(t)dt

А)

Б) зобразити фігуру,площа якої виражається інтегралом ∫13 (х - 1)dx

В) ∫13(х - 1)dx = ((х2/2) - х)│13 = (9/2) – 3 – (1/2) + 1 = 4 -2 = 2(кв. од.)

18. Умови існування на властивості визн. Інтеграла.

Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування.

Властивості:

При перестановці мед інтегралу змінюється його знак

∫ав f(x)dx= - ∫ва f(x)dx

Для будь - якої ф-ції f(x)

∫аа f(x)dx = 0

Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла

∫ав сf(x)dx = с∫ав f(x)dx

Інтеграл зі суми = сумі інтегралів

∫ав (f(x) - + g(x))dx = ∫ав f(x)dx + - ∫ав g(x)dx

Адитивна властивість

∫ав f(x)dx = ∫ав f(x)dx + ∫св f(x)dx, де а ≤ с ≤ в

Якщо f(x), g(x) – неперервні на [а, в] і f(x) ≤ g(x), то ∫ав f(x)dx ≤ ∫ав g(x)dx

│∫ав f(x)dx│= ∫ав │ f(x)│dx

а) чи інтегрована ф-ція f(x) = ln(х) на відрізку [-1.2]

∫-12 ln(х)dx = │u=lnx du=dx/x│= xlnx│-12  - ∫-12 x(dx/x) = xlnx│-12  - x│-12  =

 │dv=dx v=x │

X(mx-1) │-12  = 2(ln2-1)-(-1)(ln(1)- 1)=2(ln2-1)

Б) не обчислюючи порівняти

-∫13 xdx i ∫13 x2 dx

На відрізку [1.3] х ≤ х2 , а отже за ознакою № 6

∫13 xdx ≤ ∫13 x2 dx

19. Ф-ція верхньої межі інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца

Розглянемо інтеграл із змінною верхньою межею.

 ∫ а х f(t)dt

Очевидно він є ф-цією верхньої межі. Цю ф-цію про диференціюємо.

(∫ а х f(t)dt)’х = f(x)

Тобто похідна від інтеграла із змінною верхньою межею = значенню підінтегральної ф – ції при цій межі.

Формула Ньютона – Лейбніца. Якщо ф-ція f(x) визначена і неперервна на відрізку [a;b], і F’(x) = f(x), то ∫ав f(x)dx = F(x)│ab  = F (b) – F (a), де F (b), F (a) – значення первісної в т. b i a.

Знайти похідну по змінній x з інтегралу (∫1х(3t2+2)dt )’x = 3x2 + 2

20. Застосування визначеного інтегралу. Формули для обчислення площ, об’ємів.

Обч. Площ плоских фігур. Нехай f(x) - ф – ція неперервна на проміку [a;b], відомо, що якщо f(x) ≥ 0 на [a;b], то площина S криволінійної трапеції, обмеженої лініями у > f(x), у = 0, х = а, х = в дорівню інтегралу S = ∫ав f(x)dx



Якщо f1(x) ≥ f2(x)

S = ∫αβ (f1(x) - f2(x))dx

Обєм тіла обертання. Обєм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ криволінійної трапеції визначається ф-лою V = ∫ab πy2dx

Навколо осі OY

V= ∫ab πx2dy

Виразити через визн. Інтеграл об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ фігури, обмеженої лініями у=0, у=х, х=1



V = ∫01πy2dx = ∫01πx2dx = πx3/3│01 = π/3(куб.од.)

21. Ознаки невласних інтегралів 1-го роду, та геометричний зміст.

Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування для функції у=f(x) визначаються так:

∫ва f(x)dx=lim ∫ва f(x)dx,

 b→∞

∫в-∞ f(x)dx=lim ∫ва f(x)dx,

 a→∞

Якщо відповідна границя існує і є скінченною, то невласний інтеграл називають збіжним, в іншому випадку-розбіжним.

Геометричний зміст.

Інтеграл ∫∞0 f(x)dx

В разі збільшення ординати площа фігури зростає, але не безмежно. У називають площею нескінченної смуги.

Sn = ∫в-∞ f(x)dx

Обрати серед даних інтегралів невласні інтеграли 1-го роду і виразити їх через границі:

∫∞1 = lim∫a1

 a→∞

22.Означення невласного інтеграла 2-го роду, та геометричний зміст.

Невласний інтеграл з нескінченними межами для підінтегральної функції визначається так:

∫+∞-∞ f(x)dx=∫а-∞ f(x)dx+∫+∞а f(x)dx

Дана сума інтегралів не залежить від вибору а.

Геометрично: площа нескінченої полоси збігання до максимально великого числа, але вона точно є обмеженою.

Якщо = lim∫na f(x)dx -розбіжний, то маємо невласний інтеграл 2-го роду

 n→∞

lim∫a1 = lim(arctg(a)-arctg(1))=П/4

 a→∞

Невласних інтегралів 2-го роду в переліку немає.

23. Означення ДР, його порядку, розв’язку, інтегралу.

Диф. Рівнянням називають р-ння, незлежну змінну,невідому функцію та її похідну або диференціали різних порядків.

Порядком диф. р-ння називається порядок найстаршої похідної, що входить до рівняння.

Розв’язком диф. р-ння називається диференційована функція, підставлення якої разом з її похідними перетворє його в тотожність.

Процес відшукання розв’язків диф. р-ння називається розв’язуванням або інтегруванням диф. р-ння.

Диф. р-ння 1-го порядку має вигляд:

F(x,y,y’)=0

Або y’=f(x,y)

Диф. р-ння зі змінними, що відокремлюються:

f1 (x)g1(y)yx’+ f2 (x)g2(y)=0

Однорідні диф. р-ння: y’=f()

Визначити порядок ДР y’-2xy=0 і перевірити, чи є функція y=ex2+3  його розв’язком.

Розв’язання :

Маємо ДР 1-го порядку,

Y’=2x\* ex2 ; підставляємо в рівняння:

2x\* ex2-2x(ex2+3  )=0;

0=0

y= ex2+3 є розв’язанням р-ння y’-2xy=0

24. Задача Коші. Теорема про існування та єдність розв'язку задачі Коші для ДР 1-го порядку.

Розглянемо р-ння =f(x,y)

Серед цих розв’язків даног р-ння знайти такий, який при заданому значенні аргумента х=х0 приймає задане значення у(х)=у0. Числа х0 та у0 називають початковими умовами.

Теорема: Якщо ф-ція f(x,y) неперервна в деякій області, що містить точки(х,у), має у цій точці обмежену частинну похідну по у, то існує тільки один розв’язок р-ння y’=f(x,y), який задовольняє умову Коші: у= у0 при х=х0

Чи виконуються умови теореми про існування і єдність розв’язку задачі Коші для такої задачі

Y’=, y(0)=1, в деякому околі т.(0,1)

Розв'язання:

= ;

=

∫ y-2dy=∫ dx- ∫

= x- ln|x+1|+C

 = ln|x+1|-x+C

Y=

Y(0)==1

C=1

Y=

В-дь: Y=

25.загальний розв’язок і загальний інтеграл ДР 1-го порядку. Розв’язування задачі Коші при відомому загальному розв’язку. Частковий і особливий розв’язки.відомий загальний розвязок ДР у’-2х=0:

у = х2 +с . знайти розвязок задачі Коші для цього рівняння з початковою умовою у(1)=0.

 Загальним розв’язком ДР є вираз виду:

у=f(х)+с

,де с – const.

Розв’язати задачу Коші означає знайти єдиний розвязок,який би задовільнив умову задачі.

Наприклад прийнявши константу с=0 отримаємо у=f(х)- конкретний розвязок ДР 1-го порядку.

Якщо загальний розвязок одержано в неявному вигляді Ф(х,у,с)=0 то його називають загальним інтегралом.

Розвязок,який отримують із загального при конкретному значенні довільної сталої,називається частковим розв’язком.

Відомий аг.розвязок ДР: у’-2х=0, у=х2+с.

Розвяжемо задачу Коші зпочатковою умовою:

у(1)=0

у(1)=12 +с=0; 1+с=0; с=-1.

У=х2 -1 – розвязок задачі Коші.

26.ДР розв’язані в квадратурах. Др із зміними,що виокремлюються

ДР розв’язані в квадратурах-ДР 1-го порядку,які мають вигляд

, тощо

Далі ДР зводяться до обчислення простих інтегралів

g(y)dy=f(x)dx

ДР із змінними,що відокремлюються-це рівняння виду:

f1(x)g1(y)y’x + f2(x)g2(y)=0;

ділимо на добуток функцій f1g2 і після інтегрування отримаємо:

Вибрати рівняння з відокремлюваними змінними із заданих рівнянь:

y’=

x3y’ + y=6 – рівняння з відокремленими змінними

y’ + + xy2 = 0

y’ +

27.однорідні функції n-го степеня(приклад). Однорідні ДР 1-го порядку.

а) чи є однорідною і якого степеня функція ?

б) вибрати однорідне рівняння із заданих рівнянь(список в попередньому питанні).

Функція f(x,y) називається однорідною функцією n-го виміру,якщо при заміні в ній змінних х і у відповідно на tx,ty, де t-довільна величина(параметр), одержується та ж функція поміняна на tk,тобто:

f(tx,ty)= tkf(x,y)

показник k називають виміром,або степенем однорідної функції.

Рівняння M(x,y)dx+ N(x,y)dy = 0,в якому функції M(x,y) та N(x,y) – однорідні функції одногой того ж виміру,також є однорідними рівняннями відносно х і у.

а)f(x,y)=;

f(tx,ty)=

функція однорідна, першого виміру

б) вибрати однорідне ДР

y’=- однорідне ДР.

28.Лінійні ДР 1-го порядку. Метод варіації довільної сталої.

Вибрати лінійне рівняння із заданих рівнянь(список в попередніх питаннях)

Лінійними називають ДР яке є лінійним щодо шуканої функції та похідної, воно має вигляд:

Якщо , то рівняння називається лінійним однорідним,в іншому випадку- лінійним неоднорідним.

Метод варіації довільної сталої спочатку розв’язують відповідне однорідне ДР

*у= се*

далі С з попереднього рівняння розглядають як функцію від х, С=С(х), підбирають цю функцію так, щоб функція була розв’язком неоднорідного рівняння.

Загальний розвязок рівняння виражається формулою:

 y = *е еdx+C1)*

*Обрати лінійне рівняння*

y’ +

**29.Лінійні ДР 1-го порядку.метод Бернуллі.Рівняння Бернуллі.**

Рівняння

 =Q(x)yn (n ≠0,n≠1)

Називається рівнянням Бернулі.

Помножимо обидві його частини на (1-n)y- n,матимемо

(1-n)y-n+ (1-n)y1-nP(x)=(1-n)Q(x)

y1-n=z,

(1-n)y- n

Одержємо лінійне рівняння

Вибрати рівняння бернулі

y’++xy2=0

30.означення числового ряду,частинних сум,збіжності і суми ряду. Геометричний ряд.

Вираз а1+а2+…ап.= називається числовим рядом,а число а1,а2,ап –числами ряду.

Сума скінченної кількості членів ряду

S1=a1, S2=a1+a2,…, Sn=a1+a2+…+an  називається частковою сумою.

Якщо існує границя S=, то ряд називається збіжним,а число S- сумою цього ряду.

Якщо не існує, або вона необмежена,то ряд називається розбіжним.

Геометричний ряд – ряд складений з членів геометричної прогресії 1,q,q2,……..

1+q+q2+q3+…+qn-1=

При |q|<1 –збіжний

При q=-1,q=1,q>1 –розбіжний

Знайти частинні суми S2 I S3 для ряду

S1=2

S2=+2=

S3=+==

31.властивості рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Гармонічний ряд і його збіжність.

Властивості:

Члени ряду,що збігається,можна групувати в довільному порядку,зберігаючи послідовність членів,в результаті новий ряд збігається і має таку свму суму.

Якщо ряди збігаються, то збігається і ряд

 =.

*Якщо ряд*  збіжний,то =0.

*Гармонічний ряд : 1++++…=*

*Розглянемо послідовність часткових сум*

*Sn=1+++…+, нехай n>2m; m>2a, тоді*

*Sn=(1+)+()+()+…++2\*+4\*+…+2m-1=*

*Оскільки m>2a, то Sn>a де а –будь-яке число. Отже гармонічний ряд збіжний.*

*а) чи працює необхідна ознака?*

*; ==--ознака не працює.*

*б) чи збігається ряд*

*=0*

*Отже,за необхідних умов ряд збіжний*

*32.ряди з додатніми членами. Ознаки порівняння.*

*Ряд де an>0, називається рядом з додатніми членами.*

*Ознаки збіжності рядів з додатніми членами:*

*Порівняльна ознака*

*Якщо 0≤an≤bn? Для всіх n>n, то із збіжності ряду випливає збіжність ряду , а із розбіжності ряду, розбіжність ряду .*

*2)гранична порівняльна ознака*

*Якщо =A, де A≠0 – число, то із збіжності(розбіжності) ряду випливає збіжність(розбіжність) ряду*

*3)ознака Д’аламбера*

*Якщо =A, де А –число, то*

*Для А<1, -збіжний*

*для A>1- розбіжний*

*для A=1- ознака відповіді не дає*

*4)інтегральна ознака Коші-Макнорена*

*Якщо функція f(x), для x≥1 неперервна,додатна,монотонно спадна, то ряд,де аn=f(n) збігається або розбігається залежно від того, залежно від того, збігається чи розбігається невласний інтеграл*

*Порівняти ряд з гармонічним*

*Гранична ознака порівняння*

*==1≠0*

*Отже,оскільки гармонічний ряд розбіжний,то й ряд тоеж розбіжний*

**33.Ознака Даламбера , радикальна коли (див. завд. № 32 пит.3 та 4)**

Ознака Коші: ∞

 ∑ an

 n n = 1

якщо lim √аn = A, де А – число, то

 n → ∞

для А ‹ 1 ряд збіжний

для А › 1 ряд розбіжний

для А = 1 ознака відповіда не дає

Чи працює ознака Даламбера при досліджені ряду : ∞

 ∑ 1/n

 n = 1

Ознака непрацює оскільки lim 1/n+1 / 1/n = lim n/n+1=1

 n → 1 n → ∞

**34.Інтегральна озн. Коші (див. завд № 32 прик. 4)**

А) чи можна застосувати інтегральну ознаку для ряду : ∞

 ∑ ln n

 n = 1

∞ n n n

∫ lns dx=lim ∫ lns dx=│u =ln dv=dx│ = lim(x ln x ) │ - ∫ dx = lim (n ln n – n) = ∞

1 n→∞ 1 │du= dx/x v=x │ n→∞ 1 1 n→∞

Ряд розбіжний

Б) чи збігається ряд :

 

Ряд

 

Дослідимо



Ряд збіжний

**35. знакопочережні ряди.Ознака Лєйбніца.**

Знакозмінними називають ряд що містить і додатні і відємні члени

Якщо у знакозмінному ряді знаки чергуються то такий ряд називають знакопочережним, або рядом типу Лєйбніца.Для таких рядів справедлива теорема .

Теорема Лєйбніца: Ряд збігається якщо виконуються умови

А)lim an=0

Б)починаються з деякою N для всіх n › N маємо │an│›│ an+1│

Із заданих рядів вибрати знаконочережні

 ∞

 ∑ -1/n²+1

 n = 1

 ∞

 ∑ (-1)ⁿ/n²+1 – знаконочережний ряд

n = 1

**36.Знаконозмінні ряди – ряди які містять як додатні так і відємні члени.**

Ряд ∞

 ∑ аn

 n=1 з довільним чергуванням знаків його членів називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд ∞

 ∑ │аn │.

 n=1

Збіжний ряд ∞

 ∑ аn називають умовно збіжним, якщо ряд ∞

 n=1 ∑ │аn │ розбігається

 n=1

 Ознака Веєрштраса: функціональний ряд ряд ∞

 ∑ un(x)

 n=1 збігається на множені х рівномірно і абсолютно якщо │un(x)│‹ an для всіх х є х і числовий ряд ∞

 ∑ аn

 n=1 збігається

Озню Даламбера див.завд.№32 пит. 3

Озн. Коші див. завд. № 33

Завдання 36

Знакозмінні ряди- ряди, які містять як додатні так і відємні значення.

Ряд з довільним чергуванням знаків його членів називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд .

Збіжний ряд .називають умовно збіжним, якщо ряд розбігається.

Ознака Вейєрштраа: функціональний ряд збігається на множині х рівномірно і абсолютно, якщо |un(x)|<an для всіх х Є х і числовий ряд збігається.

 Ознаки Д’Аламбера див завд №32 п.3.

Ознака Коші див завд №33

Завдання 37

Функціональні ряди. Озн. областей збіжності

Функціональним рядом називають ряд,де un(x) – функції визначені на деякому проміжку.

Ряд називається збіжним у точці хо , якщо збігається числовий ряд .

Степеневі ряди:

Функціональний ряд вигляду

ax+a1x+a2x2+…+anxn+…+ ,

де aі-дійсні числа називають степеневим рядом

Область збіжності степеневого ряду як і довільного функціонального, можна знаходити користуючись достатніми умовами збіжності знакододатних числових рядів.

Число R≥0 називають радіусом збіжності,якщо для |х|>R ряд збігається, а для |х|<R розбігається.

Інтервал( -R;R) називається інтервалом збіжності степеневого ряду.

Теорема Абеля:

Якщо ряд = ax+a1x+a2x2+a3x3+… збігається для х=х1, *то він* абсолютно збігається для |х|<|x1| якщо ряд розбігається для х=х2 то він розбігається для х|<|x2|.

а). Із заданих рядів вибрати степеневий

  *– степеневий*

*б).Проінтнгрувати почленно ряд*

S(x)= нв відрізку [0,1]

Теорема: якщо степеневий ряд має радіус збіжності R( суму S(х))то ряд отриманий його почленним диференціюванням, має той же радіус зб R і сума його похідна від ф-ції S(х).

Теорема: Ряд отриманий в результаті почленного інтегрування ряду в межах від 0 до х має такий же радіус збіжності і його сума рівна інтегралу S(x) dlx

=

 |01=

Завдання 38

Розклад функції в ряд Тейлора і Маклорена

*Нехай* f(x) є нескінченно диференційованою функцією в околі точки х0.

Рядом Тейлора функції f(x) називається ряд вигляду f(x)= f(n)(x0)(x-x0)n= f(x0)+ f `(x0) (x-x0)+1/2\*fn(x0) (x-x0)2+…

Для x0= 0 ряд Тейлора називають рядом Маклорена

Теорема: Якщо ф-цію f(x) в інтервалі (x0-R, x0+R) тобто щоб справджувалась рівність

f(x)=(x-x0)n необхідно й достатньо щоб ф-ція f(x) мала в цьому інтервалі похідні всіх порядків і залишковий член її ряду Тейлора прямував до нуля при n→∞ для всіх х з даного інтервалу.

ۦ Знайти перші 3 члени розкладу в ряд Маклорена ф-ції f(x)=3x

Розв.

f `(x)= 3xln3

f```(x)= 3xln2 3

f `` `(x)= 3xln3 3

3x=31+x ln3+1/2(x2 ln2 3)+1/6(x3 ln3 3)+…

Завдання 39

Ряди Маклорена для функцій

ex=1++ +… (R=∞)

sinx= - + +… (R=∞)

cosx= ex=1 - - +… (R=∞)

ln(1+x)= - - … (R=1)

(1+x)α=1+αx+ x2+x3+… (R=1)

Arctgx= x - + +… (R=1)

Використовуючи попередні ряди розкласти в ряд Маклорена ф-цію:

e2x^2=1+ + +