17. Визначений інтеграл. Означення, геом. і фізичний зміст.

Якщо існує границя інтегральної суми для λ -> 0, n-> ∞ яка не залежить від способу розбиття відрізка [а;b] і вибору точок, то ця границі назив. Визначеним інтегралом від ф-ції f(x) на відрізку [а;b] і позн. символом ∫ав f(x)dx=limSn; λ→0; n→∞. Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування. Якщо f(x) >0 то ∫ав f(x)dx чисельно = площі криволінійної трапеції обмеженої лініями у = f(x), х=а, х=в, у = 0. У цьому випадку маємо геометричний зміст визначеного інтеграла.

Фізичний зміст:

Шлях, яким рухалася точка з моменту t1 до t2 рівний інтегралу S = ∫ t1 t2 f(t)dt

А)

Б) зобразити фігуру,площа якої виражається інтегралом ∫13 (х - 1)dx

В) ∫13(х - 1)dx = ((х2/2) - х)│13 = (9/2) – 3 – (1/2) + 1 = 4 -2 = 2(кв. од.)

18. Умови існування на властивості визн. Інтеграла.

Теорема: якщо ф-ція f(x) неперервна на [a;b] то limSn; λ→0; n→∞ існує і не залежить від способу розбиття відрізка [a;b] на часткові. В такому випадку ф-цію назив. інтегрованою числа а, b відповідно нижньою та верхнею межами інтегрування.

Властивості:

1. При перестановці мед інтегралу змінюється його знак

∫ав f(x)dx= - ∫ва f(x)dx

1. Для будь - якої ф-ції f(x)

∫аа f(x)dx = 0

1. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла

∫ав сf(x)dx = с∫ав f(x)dx

1. Інтеграл зі суми = сумі інтегралів

∫ав (f(x) - + g(x))dx = ∫ав f(x)dx + - ∫ав g(x)dx

1. Адитивна властивість

∫ав f(x)dx = ∫ав f(x)dx + ∫св f(x)dx, де а ≤ с ≤ в

1. Якщо f(x), g(x) – неперервні на [а, в] і f(x) ≤ g(x), то ∫ав f(x)dx ≤ ∫ав g(x)dx
2. │∫ав f(x)dx│= ∫ав │ f(x)│dx

а) чи інтегрована ф-ція f(x) = ln(х) на відрізку [-1.2]

∫-12 ln(х)dx = │u=lnx du=dx/x│= xlnx│-12  - ∫-12 x(dx/x) = xlnx│-12  - x│-12  =

 │dv=dx v=x │

X(mx-1) │-12  = 2(ln2-1)-(-1)(ln(1)- 1)=2(ln2-1)

Б) не обчислюючи порівняти

-∫13 xdx i ∫13 x2 dx

На відрізку [1.3] х ≤ х2 , а отже за ознакою № 6

∫13 xdx ≤ ∫13 x2 dx

19. Ф-ція верхньої межі інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца

Розглянемо інтеграл із змінною верхньою межею.

 ∫ а х f(t)dt

Очевидно він є ф-цією верхньої межі. Цю ф-цію про диференціюємо.

(∫ а х f(t)dt)’х = f(x)

Тобто похідна від інтеграла із змінною верхньою межею = значенню підінтегральної ф – ції при цій межі.

Формула Ньютона – Лейбніца. Якщо ф-ція f(x) визначена і неперервна на відрізку [a;b], і F’(x) = f(x), то ∫ав f(x)dx = F(x)│ab  = F (b) – F (a), де F (b), F (a) – значення первісної в т. b i a.

Знайти похідну по змінній x з інтегралу (∫1х(3t2+2)dt )’x = 3x2 + 2

20. Застосування визначеного інтегралу. Формули для обчислення площ, об’ємів.

Обч. Площ плоских фігур. Нехай f(x) - ф – ція неперервна на проміку [a;b], відомо, що якщо f(x) ≥ 0 на [a;b], то площина S криволінійної трапеції, обмеженої лініями у > f(x), у = 0, х = а, х = в дорівню інтегралу S = ∫ав f(x)dx



Якщо f1(x) ≥ f2(x)

S = ∫αβ (f1(x) - f2(x))dx

Обєм тіла обертання. Обєм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ криволінійної трапеції визначається ф-лою V $=\lim\_{∆x\to 0}Ʃπy^{2}∆x$ = ∫ab πy2dx

Навколо осі OY

V= ∫ab πx2dy

Виразити через визн. Інтеграл об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ОХ фігури, обмеженої лініями у=0, у=х, х=1



V = ∫01πy2dx = ∫01πx2dx = πx3/3│01 = π/3(куб.од.)