**ЧАСТИНА І**

* 1. **Комплексні числа та дії над ними**

***Комплексним число****м* називається впорядкована пара  дійсних чисел  і , якщо для них визначені поняття рівності та операції додавання і множення наступним чином:

1. Два комплексних числа  та  є рівними тоді і тільки тоді, якщо  і .
2. *Сумою* *(різницею)* двох комплексних числа  називається комплексне число .
3. *Добутком* двох комплексних числа  називається комплексне число .

Комплексне число  називається *уявною одиницею* та позначається буквою.

За допомогою формули добутку комплексних чисел знайдемо :

.

Із формул суми та добутку комплексних чисел випливають рівності :

 ;

.

Таким чином, кожне комплексне число  можна подати у вигляді . Такий запис називається *алгебраїчною формою* комплексного числа. Комплексне число виду  називається чисто уявним.

Комплексне число прийнято позначати однією буквою **, тобто . Число  називається *дійсною* *частиною*, а число  *уявною* *частиною* комплексного числа  і позначаються відповідно:  та .

Комплексне число  називається *комплексно спряженими* до комплексного числа  і позначається **:

.

Очевидно, що  тоді і тільки тоді коли **- дійсне число.

Число  називається *модулем* комплексного числа  і позначається **:

.

Очевидно, що  , причому **тоді і тільки тоді коли **. Відмітимо ще такі формули, які випливають із означень модуля та спряженого комплексного числа:

, .

Операції додавання і множення володіють властивостями:

1. *Комутативності*: ; ;
2. *Асоціативності*: ; ;
3. *Дистрибутивності*: .

Операція обернена до множення називається *діленням*, а діленим двох чисел  та  називається таке число , яке задовольняє рівнянню  і позначається .

Якщо ,  то :

.

В прямокутній системі координат комплексне число  зображується точкою площини із координатами  і позначається тією ж буквою . Існує взаємнооднозначне відображення між комплексними числами та точками площини. Вісь абсцис називають *дійсною віссю*, а вісь ординат – *уявною віссю*. Площина, на якій зображуються комплексні числа, називається *комплексною площиною*. Комплексне число  зображується також вектором з початком в точці  і кінцем в точці . Довжина вектора  дорівнює модулю . Положення точки  на комплексній площині однозначно визначається не тільки декартовими координатами , але і полярними координатами , де - відстань від точки  до точки , а - кут між дійсною віссю та вектором , який відраховується від додатного напрямку дійсної осі. При цьому якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки, то величина кута є додатною. Цей кут називається аргументом комплексного числа  і позначається .

Аргумент комплексного числа є багатозначним і визначається з точністю до значення, кратного . Те значення , яке задовольняє нерівність , називається *головним значенням аргументу* і позначається :

 

 Для обчислення головного значення аргументу комплексного числа можна використати формули



Зауважимо, що для комплексного числа  його модуль дорівнює нулю, а аргумент не визначений.

Будь-яке комплексне число можна подати у *тригонометричній* формі

.

При  матимемо . Комплексне число  позначається символом , тобто функція  для будь-якого дійсного числа  визначається *формулою Ейлера* : . На основі цієї формули будь-яке комплексне число можна подати у *показниковій* формі:

.

Функція  володіє звичайними властивостями показникової функції. Подамо операції множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній та показниковій формах. Нехай задано два комплексних числа:

  .

Тоді

 ,

.

Комплексне число  називається *коренем* *степені із числа * (позначається ), якщо . Для добування кореня -го степеня з комплексного числа використовують формулу:



У результаті отримаємо  різних значень , які будуть вершинами правильного - кутника, вписаного в коло радіуса  з центром у точці нуль.

 *Приклади:*

1. Знайти модуль та головне значення аргументу комплексного числа .

Розв’язування:

.

1. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа .

Розв’язування:

  

1. Знайти дійсну та уявну частини комплексного числа:

  

1. Знайти всі корені рівняння 

Розв’язування:

 

   

  

* 1. **Функції комплексної змінної**

Кожному комплексному числу  відповідає точка  комплексної площини ***С***. Якщо змінюється відповідно до тих чи інших умов, то в цьому випадку ми маємо справу з *комплексними змінними* . Всім значенням комплексної змінної , де , взаємно однозначно відповідає сукупність всіх точок площини ***С***, яку називають *площиною комплексної змінної* . Комплексна площина, доповнена нескінченно віддаленою точкою , називається *розширеною площиною комплексної змінної* і позначається .

Нехай  - множина точок комплексної площини. Точка  називається *внутрішньою точкою множини* , якщо досить малий окіл цієї точки повністю належить множині . Множина  називається *відкритою*, якщо кожна її точка є внутрішньою для неї.

*Проколеним -околом* точки  називають множини точок , які задовольняють нерівність  і позначається ****.

Непорожня множина  комплексної площини чи розширеної комплексної площини називається *областю*, якщо виконуються такі умови:

- вона *відкрита*, тобто разом з кожною своєю точкою містить деякий окіл цієї точки;

- вона *зв’язна*, тобто будь-які дві її точки можна сполучити деякою ламаною , всі точки якої належать цій множині .

Точка  називається *межовою точкою* області , якщо в кожному її околі містяться точки, що належать і що не належать цій області.

Множина всіх межових точок  області  називається *межею* цієї області.

Якщо при русі вздовж межі  область  весь час залишається зліва, то такий напрям орієнтації межі  називається *додатним обходом*.

Об’єднання області  з її межею , називається *замкненою областю* (*замиканням області* ) і позначається .

Область, для якої будь-який замкнений контур, що повністю належить області, можна неперервно деформувати в точку, не виходячи за межі області називається *однозв’язною*. У протилежному випадку область називається *багатозв’язною*.

Нехай на множині  комплексної площини  визначена *комплекснозначна функція  комплексної змінної* , тобто кожній точці  поставлено у відповідність комплексне число . Цю функцію можна подати у вигляді , де , . Таким чином, *комплекснозначну функцію комплексної змінної*  можна розглядати як пару дійсних функцій двох дійсних змінних. Наприклад, функція  ставить у відповідність кожному комплексному числу  число ; ця функція визначена у всій скінченій комплексній площині, а якщо покласти , то вона буде визначеною і у всій розширеній площині.

Функція  комплексної змінної називається *однозначною*, якщо вона кожній точці  ставить у відповідність лише одне значення .

Множину значень функції  в точці  називають *образом точки* при відображенні .

**Основні елементарні функції комплексної змінної**

* Показникова функція: .
* Тригонометричні функції: ,

, .

* Гіперболічні функції: .
* Логарифмічна функція: 

де  - головне значення функції .

* Загальна степенева функція: ,

 де  - головне значення функції.

* Загальна показникова функція: 

 де  - головне значення функції.

 *Приклад*

 Знайти вирази для дійсної та уявної частин функції .

Розв’язування:

 

.

Звідки



* 1. **Границя, неперервність і диференціювання функцій комплексної змінної**

Поняття границі, неперервності і диференційованості вводяться тільки для однозначних функцій.

Якщо функція  однозначна і визначена в проколеному -околі точки , то поняття *границі функції в точці*  вводиться за аналогією з випадком функції дійсної змінної:

.

Іншими словами, комплексне число  називають границею функції  в точці , якщо для всіх точок , близьких за модулем до точки , відповідні значення  близькі за модулем до числа .

 З геометричної точки зору існування границі функції  означає, що проколений -окіл точки  відображається на проколений -окіл точки .

Однозначна функція , яка визначена в околі точки , називається *неперервною в точці* , якщо .

Якщо функція неперервна в кожній точці області , то кажуть, що вона неперервна в .

Нехай однозначна функція  визначена в деякому -околі точки . Розглянемо всі можливі прирости незалежної змінної  , які належать цьому -околу. Кожному  відповідає приріст функції .області  комплексної змінної . Введемо позначення . Точки  і  належать області .

*Похідною*  функції  у точці  називається границя відношення приросту функції  до приросту аргументу , коли приріст аргументу прямує до нуля довільним способом:

.

Функція, що має *скінченну* похідну в точці , називається *диференційовною* в цій точці.

*Теорема* (*необхідні та достатні умови комплексної диференційовності функції*)*.*

*Нехай функція  визначена в околі точки .*

*Для того,щоб вона була диференційованою в точці , необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувалися умови Коші-Рімана:*

**

Якщо в деякій точці  виконуються умови Коші-Рімана і, крім того, функції  диференційовані як функції двох дійсних змінних, то функція  є диференційованою в точці  як функція комплексної змінної .

Функція  називається *аналітичною в точці* , якщо вона диференційована як в самій точці , так і в деякому її околі. Функція  називається *аналітичною в області* , якщо вона аналітична в кожній .

Похідна аналітичної функції обчислюється за формулами:

.

 Використовуючи умови Коші-Рімана, можна відновити аналітичну функцію , якщо відома її дійсна  або уявна  частини і, крім того, задано значення  функції в деякій точці .

*Приклади:*

1. Дослідити на диференційовність функцію, у випадку існування знайти її похідну.

а) ; б) ;

Розв’язування. ; ;

а) ;

; ; ; .

Знайдені частинні похідні задовольняють умови Коші – Рімана. Обчислимо комплексну похідну:

.

б) ;

; ; ; .

Знайдені частинні похідні не задовольняють умови Коші – Рімана . Тому дана функція не диференційовна в жодній точці комплексної площини.

1. Визначити аналітичну функцію , якщо відома її дійсна частина  і .

Розв’язування:

Із першої умови Коші-Рімана отримаємо: . Знаходимо, що , звідси

,

де  - невідома функція. З другої умови Коші-Рімана отримуємо:

.

Тоді  Отже,  і



З додаткової умови знаходимо, що . Отже, .

* 1. **Інтегрування функцій комплексної змінної**

Нехай однозначна функція  визначена і неперервна в області , а - кусково-гладка крива, що лежить в області . Розіб’ємо криву  на частинні дуги точками  і на кожній дузі виберемо точки . Тоді *інтегралом* від  вздовж кривої  називається границя



при умові, що така границя існує і не залежить ні від способу розбиття кривої  на частинні дуги, ні від вибору точок .

Якщо функція  неперервна на , то інтеграл існує.

 Якщо , то обчислення інтеграла зводиться до обчислення двох криволінійних інтегралів другого роду:

.

Тому для інтеграла від комплексної функції справедливі відповідні властивості криволінійних інтегралів. Зокрема, при зміні напряму обходу кривої цей інтеграл тільки змінює знак:



Якщо крива  задана параметричними рівняннями , а початкова і кінцева точки кривої відповідають значенням  і , то

, де .

Якщо  - аналітична функція в однозв’язній області , то інтеграл не залежить від шляху інтегрування (залежить тільки від початкової та кінцевої точок). В цьому випадку для обчислення інтеграла застосовується *формула Ньютона-Лейбніца*:

,

де  - первісна функції , тобто  в області , , .

Теорема (*інтегральна теорема Коші* *для однозв’язної області*). *Якщо функція  аналітична в однозв’язній області , що обмежена кусково-гладким контуром  і неперервна в замкненій області , то інтеграл функції  по замкненому контуру  дорівнює нулю*

.

Теорема Коші поширюється на *багатозв’язну область* : *якщо функція  аналітична в багатозв’язній області , що обмежена зовнішнім контуром  і внутрішніми контурами , і неперервна в замкненій області , то інтеграл функції  по повній межі області в додатному напрямі дорівнює нулю*



Іншими словами, для складеного контуру справедливо: *інтеграл функції  по зовнішньому контуру дорівнює сумі інтегралів по всіх внутрішніх контурах при умові, що обіг усіх контурів здійснюється проти годинникової стрілки*

.

Якщо функція  є аналітичною в однозв’язній області , обмеженій кусково-гладким замкнутим контуром  і неперервна на самому контурі, то за теоремою Коші



і для будь-якої внутрішньої точки  за *інтегральною формулою Коші*

.

Наслідок 1. 

Наслідок 2. Нехай функція  – аналітична в області  з межею  і  – довільна внутрішня точка цієї області. Тоді функція  нескінченно разів диференційовна, причому

**;** **,** .

Інтегральна формула Коші справедлива не тільки для однозв’язної області, але узагальнюється і на випадок багатозв’язних областей. Якщо функція  є аналітичною у багатозв’язній області , обмеженій контуром  і внутрішніми по відношенню до нього контурами , і неперервна у замкнутій області  (знаки у верхніх індексах означають напрямок обходу) то за *теоремою Коші для багатозв’язної області*

.

*Приклади:*

1. Обчислити інтеграл по дузі  – коло.

 Розв’язування:

**.**

1. Обчислити інтеграл , де  - дуга параболи  від точки  до точки .

Розв’язування:

*Перший спосіб*. Запишемо підінтегральну функцію у вигляді

. Тоді за формулою обчислення інтеграла отримаємо



*Другий спосіб*. Запишемо рівняння кривої  у параметричній формі . Тоді  і

,

*Третій спосіб*. Оскільки підінтегральна функція є аналітичною в області. що містить криву , то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо



1. Обчислити інтеграл , якщо

а)  б)  в) 

Розв’язування:

а) У замкненій області, обмеженій колом , підінтегральна функція аналітична, тому за теоремою Коші, отримаємо

;

б) В області, обмеженій колом , знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю в точці . Тому

 ;

в) В області, обмеженій колом , знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю у двох точках  і , тому безпосередньо застосовувати інтегральну формулу Коші не можна. В цьому випадку необхідно або розкласти дріб  на прості дроби або розглянути багатозв’язну область , обмежену колом  і внутрішніми контурами  і , де . Тоді в цій області підінтегральна функція є аналітичною і

,

звідки випливає, що

.

Тоді

,

.

Остаточно маємо: .

* 1. **Степеневі ряди. Ряди Тейлора та Лорана**

*Степеневим рядом* з центром у точці  називається функціональний ряд

,

де   – *коефіцієнти ряду* (комплексні числа).

Теорема 1 (*теорема Абеля*). *Якщо степеневий ряд збігається в деякій точці  , то він абсолютно збігається в крузі радіуса  з центром . Якщо степеневий ряд розбігається в деякій точці  , то він розбігається поза кругом радіуса  з центром *.

За теоремою Абеля для степеневого ряду завжди існує *круг збіжності* , всередині якого ряд збігається, зовні – розбігається, а на самому колі  можуть бути як точки збіжності, так і розбіжності. Радіус  цього круга називається *радіусом збіжності*, який знаходиться за ознакою Даламбера чи радикальною ознаку Коші за формулами:

 або .

Теорема 2 (*теорема Тейлора*). *Нехай функція  – аналітична всередині круга радіуса  з центром у точці . Тоді вона може бути подана у цьому крузі збіжним степеневим рядом Тейлора*

;  .

*Причому цей ряд визначається однозначно*.

Зауваження 2. Використовуючи наслідок з формули Коші, коефіцієнти ряду Тейлора можна подати у вигляді

, .

На практиці для обчислення коефіцієнтів  використовують, якщо це можливо розклад функції на прості дроби і розклади елементарних функцій в ряд Тейлора.

*Розклад основних елементарних функцій в ряд Тейлора*

* 
* 
* 
* 
* 
* 



 ( якщо  то функція  розкладається за біномом Ньютона і ).

.

*Рядом Лорана* називається ряд

,

при цьому ряд  називається *головною частиною ряду Лорана*, а ряд - *правильною частиною*.

Якщо

,

то областю збіжності ряду Лорана є кільце , в якому сума ряду Лорана є аналітичною функцією, а коефіцієнти ряду  обчислюються за формулою

,

де  - довільне коло з центром в точці , що лежить всередині даного кільця.

*Теорема Лорана.* *Якщо функція  аналітична в кільці , то в цьому кільці вона єдиним чином розкладається в ряд Лорана , коефіцієнти якого обчислюються за формулою .*

*Приклади:*

* 1. Розкласти функцію  в ряд Тейлора в околі точки  і знайти радіус збіжності отриманого ряду.

Розв’язання. Подамо функцію у вигляді

**.**

Якщо , то другий доданок в останньому виразі можна розглядати як суму  нескінченно спадної геометричної прогресії  з першим членом  і знаменником . Тоді

****

**.**

Отриманий ряд в силу однозначності розвинення і є шуканим рядом Тейлора. Радіус збіжності цього ряду визначається з умови . Тоді . Отже, .

* 1. Розкласти функцію  в ряд Лорана в околі точки .

Розв’язування:

Функція  є аналітичною у кільці , отже, розкладається в ряд Лорана. Скористаємося розкладом показникової функції в ряд Тейлора в околі точки :



і замінимо  на . Тоді



* 1. Знайти всі розклади функції  в ряд Лорана за степенями , де .

Розв’язування:

Функція є аналітичною у всій комплексній площині за винятком точок  і , тому у кільцях  її можна розкласти в ряд Лорана, де  - це відстань від точки  до ;  - це відстань від точки  до .

Спочатку розкладемо задану функцію на прості дроби:

.

 а) Розглянемо кільце .

 

.

б) Розглянемо кільце .

 

.

в) Розглянемо кільце .

 

.

* 1. **Ізольовані особливі точки та їх характер**

Точка  називається *ізольованою особливою точкою однозначного характеру* функції , якщо  - однозначна і аналітична функція в круговому кільці  крім точки .

Функцію  в околі точки  можна розкласти в ряд Лорана, збіжний в кільці . При цьому можливі три випадки, коли ряд Лорана:

1) не містить членів з від’ємними степенями , тобто *головна* частина ряду Лорана відсутня. В цьому випадку  називається *усувною особливою точкою* функції ;

2) містить *скінчене* число членів з від’ємними степенями , тобто . В цьому випадку  називається *полюсом порядку n* функції ;

3) містить нескінчене число членів з від’ємними степенями , тобто . В цьому випадку  називається *суттєво особливою точкою* функції .

Точка  називається *нулем функції* , якщо .

Точка  називається *нулем* *-го порядку*, якщо , а  . Якщо , то  називають *простим нулем* функції .

Точка  називається *ізольованою особливою точкою* функції , якщо  - однозначна аналітична в кільці  і  - особлива точка.

*Твердження:*

1. Для того, щоб точка  була *усувною* особливою точкою аналітичної функції , необхідно і достатньо, щоб існувала скінчена границя .
2. а) Для того, щоб точка  була *полюсом* аналітичної функції , необхідно і достатньо, щоб .

б) Для того, щоб точка  була *полюсом* порядку  аналітичної функції , необхідно і достатньо, щоб функцію  можна було подати у вигляді , де  - функція аналітична в точці , причому .

3. Для того, щоб точка  була *суттєво* особливою точкою аналітичної функції , необхідно і достатньо, щоб в точці  *не існувала* *границя функції*.

 Дослідження характеру *нескінченно віддаленої* особливої точки зручно проводити шляхом заміни , за допомогою якої нескінченно віддалена точка  переходить в точку .

*Приклади:*

Знайти всі особливі точки заданих функцій  і визначити їх характер.

1. 

Розв’язування:

Особливими точками є точка  і точки, в яких знаменник перетворюється в нуль , причому ці точки є нулями 1-го порядку. Отже, в точках  функція  має полюси першого порядку. Точка  не є ізольованою особливою точкою, бо вона є граничною точкою полюсів, оскільки .

2. .

Розв’язування:

Особливими точками є точки, в яких знаменник перетворюється в нуль:  і . Точка  є полюсом 3-го порядку, бо ця точка є нулем 3-го порядку знаменника функції. Аналогічно точки  є *полюсами* 1-го порядку. Оскільки , то  є *усувною* ізольованою особливою точкою.

3. .

Розв’язування:

Особливою точкою є точка . Розкладемо функцію в ряд Лорана в околі цієї точки:

.

Цей ряд має нескінченно багато членів з від’ємними степенями, тому точка  є *суттєво* особливою точкою.

* 1. **Теорія лишків**

Нехай  - ізольована особлива точка функції .

*Лишком функції f(z) в точці z0* називається число, яке визначається рівністю і позначається символом  :

,

де замкнутий контур  лежить в області аналітичності функції  і не містить всередині жодних інших особливих точок, крім точки .

 З означення випливає, що лишок функції дорівнює коефіцієнту  розкладу функції  в ряд Лорана в околі точки :

.

1. Лишок в *усувній* особливій точці дорівнює *нулю*.

2. Лишок функції  в *полюсі го* порядку обчислюється за формулою

,

а при 

.

 Якщо в околі точки  функція , де  - аналітичні функції, причому  ( в цьому випадку  - полюс 1-го порядку функції  ), то

.

 3. Якщо точка  є *суттєво* особливою точкою функції , то

.

 4. Якщо  - ізольована особлива точка функції , то

.

 Якщо функція  аналітична в точці , то

, де .

***Перша*** *теорема про лишки****.*** *Якщо функція  аналітична в області , за виключенням скінченого числа ізольованих особливих точок , то для будь-якого простого замкнутого контуру , що охоплює точки *

*.*

***Друга*** *теорема про лишки****.*** *Якщо функція  аналітична у всій комплексній площині, за виключенням ізольованих особливих точок , то*

*.*

*Зауваження.* Часто на практиці при обчисленні інтеграла по замкнутому контуру зручно використовувати формулу

,

де точки  не належать області, обмеженій контуром інтегрування.

*Приклади:*

1. Знайти лишок .

Розв’язування:

Точка  є полюсом 1-го порядку. Тому

 .

1. Знайти лишок .

Розв’язування:

Точка  є полюсом 3-го порядку. Тому

.

1. Знайти лишок .

Розв’язування:

 Точка  є суттєво особливою. Тому розкладемо задану функцію в ряд Лорана за степенями 

 .

 Оскільки , то

 .

1. Обчислити інтеграл , де .

Розв’язування:

Всередині контура  є дві особливі точки підінтегральної функції – полюси 1-го порядку . За першою теоремою про лишки маємо



 .

1. Обчислити інтеграл , де .

Розв’язування:

Всередині контура  підінтегральна функція має десять особливих точок , які є простими полюсами, що лежать на колі одиничного радіуса. Враховуючи, що поза контуром інтегрування підінтегральна функція особливих точок не має і , відповідно до *Зауваження* маємо

.

* 1. **Перетворення Лапласа**

*Перетворенням Лапласа* функції  називається функція  комплексної змінної , що визначається рівністю

.

 *Оригіналом* називається будь-яка функція , яка задовольняє умови:

1)  при , причому приймається, що ;

2) існують такі константи  і , що

 при ;

 величина  називається *показником росту* функції ;

3) на будь-якому скінченому відрізку  функції  може мати лише скінчене число точок розриву 1-го роду.

 Якщо  - оригінал, то інтеграл  є абсолютно і рівномірно збіжним у півплощині . При цьому функція  є аналітичною у півплощині  і називається *зображенням* функції .

 Відповідність між оригіналом  і його зображенням  символічно записують у вигляді .

*Властивості перетворення Лапласа:*

1. Якщо  є зображенням функції , то

.

1. *Лінійність*: для будь-яких комплексних констант  і :

.

1. *Формула* *подібності*: для будь-якої константи :

.

1. *Формула зміщення*: для будь-якого комплексного 

.

1. *Формула запізнення*:

.

1. *Диференціювання оригінала*: якщо функції  є функціями- оригіналами, то

;

;

……………………………………………….

,

 де .

1. *Диференціювання зображення*:

; .

1. *Інтегрування оригінала*:

.

1. *Інтегрування зображення*: якщо  є функцією-оригіналом, то

.

1. *Формула множення* зображень:



1. Інтеграл  називається *згорткою функцій* ** і ** і позначається символом 

**Пошук оригінала за відомим зображенням**

 Щоб знайти оригінал ** за відомим зображенням  використовують наступні прийоми:

1. якщо  є правильний раціональний дріб, то його розкладають на суму простих дробів і знаходять оригінали для кожного простого дробу за таблицею зображень оригіналів, використовуючи властивості перетворення Лапласа;
2. використовують формулу розкладу, згідно з якою оригіналом для  є функція

,

 де сума лишків береться по всіх особливих точках  функції .

Якщо  - прості полюси і , де  - многочлени без спільних коренів, то

.

 При знаходженні оригінала чи зображення зручно користуватися *таблицею перетворення Лапласа*

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

*Приклади:*

1. Знайти зображення Лапласа для функцій:

а) 

Розв’язування: Використовуючи властивості інтегрального перетворення Лапласа і таблицю перетворення, заходимо

.

б) .

Розв’язування: За формулою Ейлера

 .

Тоді

 .

 в) .

Розв’язування: Оскільки , то

 .

Зображення заданої функції можна знайти за формулою диференціювання зображення :

.

г)  ( інтегральний синус ).

Розв’язування: Використовуючи формулу інтегрування зображення, знаходимо

.

За формулою інтегрування оригінала

 .

д) .

Розв’язування: Використовуючи поняття згортки функцій, маємо

 .

1. Знайти оригінали для заданих функцій:

а) .

Розв’язування: Виділяючи у знаменнику повний квадрат і використовуючи таблицю зображень, знаходимо

.

б) .

Розв’язування: Розклавши функцію на прості дроби, отримаємо

.

в) .

Розв’язування: Покладемо , . Точки  - прості полюси функції , тоді

.

1. Знайти розв’язок диференціального рівняння , який задовольняє умовам .

Розв’язування: Операторне рівняння матиме вигляд

 .

Звідси знаходимо

 .

Тоді оригінал, тобто шуканий розв’язок, має вигляд

 .